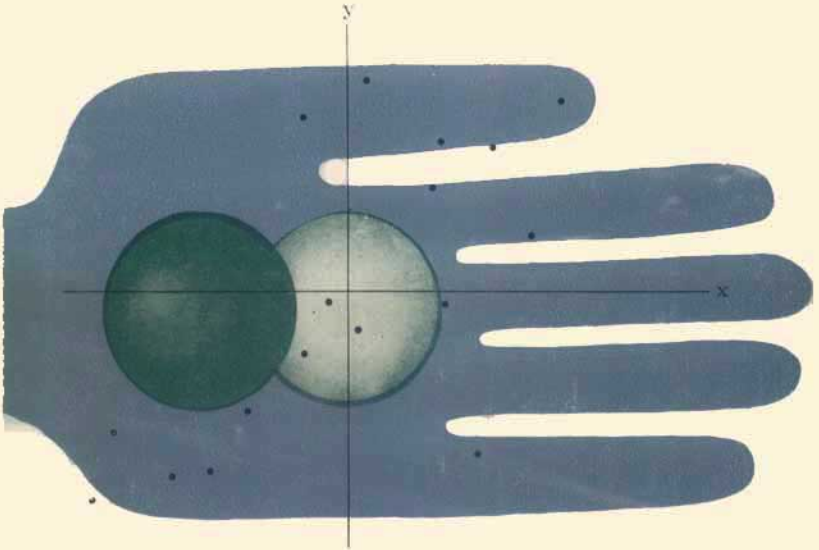
Introducción a la Teoría de las Probabilidades

V. S. Pugachev



Editorial Mir · Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

В. С. ПУГАЧЕВ

Введение в теорию вероятностей

Издательство «Наука» Москва

V. S. PUGACHEV

Introducción a la Teoría de las Probabilidades

EDITORIAL MIR MOSCU

CDU 519.21 = 60

Traducido del ruso
por
A. Samojválov

Impreso en la URSS

1973

На испанском языке

© Traducción al español Editorial Mir, 1973

П $\frac{0223-284}{041(01)-73}$

Contenido

Prólogo 7

Capítulo 1. Probabilidad de un acontecimiento 11

§ 1.1. Objeto de la Teoría de las Probabilidades. Significado de los métodos estadísticos 11
§ 1.2. Fundamentos experimentales de la Teoría de las Probabilidades 13
§ 1.3. Probabilidad del acontecimiento y sus propiedades . . . 25
§ 1.4. Repetición de los experimentos 35

Capítulo 2. Magnitudes aleatorias 39

§ 2.1. Función de distribución y densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria 39
§ 2.2. Aplicación de las funciones impulsivas y generalización de la noción de densidad de probabilidad 49
§ 2.3. Momentos de una magnitud aleatoria 58
§ 2.4. Función característica de una magnitud aleatoria . . . 64
§ 2.5. Ley normal de distribución (Ley de Gauss) 68
§ 2.6. Ley de Poisson 73

Capítulo 3. Magnitudes aleatorias vectoriales 80

§ 3.1. Función de distribución y densidad de probabilidad de un vector aleatorio 80
§ 3.2. Funciones condicionales de distribución y densidades condicionales de la probabilidad 87
§ 3.3. Leyes de distribución de las funciones de magnitudes aleatorias 99
§ 3.4. Momentos de un vector aleatorio 109
§ 3.5. Función característica de un vector aleatorio 115
§ 3.6. Ley normal bidimensional de distribución 119
§ 3.7. Magnitudes aleatorias complejas 124
§ 3.8. Propiedades de las esperanzas matemáticas 127
§ 3.9. Propiedades de las dispersiones y de los momentos de correlación 131
§ 3.10. Determinación de los momentos de las funciones de las magnitudes aleatorias 137
§ 3.11. Distribución normal polidimensional 140

Capítulo 4. Características de funciones aleatorias 155

§ 4.1. Leyes de distribución de una magnitud aleatoria 155
§ 4.2. Esperanza matemática y función correlativa de una función aleatoria 159
§ 4.3. Propiedades de la función correlativa 174
§ 4.4. Función correlativa recíproca y sus propiedades 176
§ 4.5. Adición de funciones aleatorias 180
§ 4.6. Derivación de una función aleatoria 181
§ 4.7. Integración de una función aleatoria 185
§ 4.8. Secuencias aleatorias. Procesos aleatorios markovianos . . . 188

Capítulo 5. Funciones aleatorias estacionarias 193

§ 5.1. Definición y propiedades principales de las funciones aleatorias estacionarias 193
§ 5.2. Estructura de una función aleatoria estacionaria 199
§ 5.3. Descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria en forma compleja 213
§ 5.4. Noción de ruido blanco 223
§ 5.5. Funciones aleatorias estacionarias ergódicas 228
§ 5.6. Densidad espectral recíproca de dos funciones estacionarias y enlazadas estacionariamente 236
§ 5.7. Secuencias aleatorias estacionarias 239

Capítulo 6. Representaciones canónicas de funciones aleatorias 246

§ 6.1. Tipos de representaciones canónicas 246
§ 6.2. Descomposición canónica de una función aleatoria 249
§ 6.3. Fórmula para el término residual de la descomposición canónica 257
§ 6.4. Construcción de la descomposición canónica de una función aleatoria según la descomposición canónica de su función correlativa 262
§ 6.5. Representación canónica integral de una función aleatoria 268
§ 6.6. Representación canónica integral de una función aleatoria estacionaria 274

Capítulo 7. Entropía e información que se contiene en las magnitudes aleatorias 278

§ 7.1. Medición de la indeterminación de fenómenos aleatorios. Noción de entropía 278
§ 7.2. Entropía de una magnitud aleatoria. Entropía condicional media 284
§ 7.3. Propiedad extremal de la distribución normal 291
§ 7.4. Información que se contiene en las magnitudes aleatorias 293

Capítulo 8. Determinación de las características estadísticas según los resultados de experimentos 298

§ 8.1. Determinación de las probabilidades de acontecimientos, las funciones de distribución y las densidades de probabilidad 298
§ 8.2. Determinación de los momentos de magnitudes aleatorias 302
§ 8.3. Determinación de los momentos de funciones aleatorias estacionarias 306
§ 8.4. Determinación de los momentos de funciones aleatorias no estacionarias 312

Suplementos 316

1. Algunas integrales definidas 316
2. Tabla de los valores de la función de Laplace 322

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz \ldots$$

Prólogo

Este libro ofrece una exposición elemental de la Teoría de las Probabilidades y la Teoría de Funciones Aleatorias en el volumen necesario para asimilar los fundamentos de la moderna Teoría de Procesos de Mando, Radiotécnica Teórica y Técnica de Cálculo. El presente libro se basa en las conferencias repetidamente leídas por el autor durante los últimos diez años.

El primer capítulo se dedica a la exposición de los conceptos fundamentales de la Teoría de las Probabilidades y la deducción de las fórmulas para calcular las probabilidades de acontecimientos compuestos según los datos para las probabilidades de acontecimientos más simples.

En el segundo capítulo se trata de las magnitudes aleatorias escalares y sus características principales: funciones de distribución, densidades de probabilidad, momentos, en particular, esperanzas matemáticas y dispersiones, funciones características; se examinan diferentes tipos de leyes de distribución que se encuentran en los problemas prácticos; se analiza especialmente la ley normal de distribución.

En el tercer capítulo se estudian las magnitudes aleatorias vectoriales y sus características principales. Se introducen las nociones acerca de las funciones condicionales de distribución y la densidad de probabilidad, acerca de la esperanza matemática y la matriz correlativa de un vector aleatorio. Se dan las definiciones de las magnitudes aleatorias dependientes e independientes, correlacionadas y no correlacionadas. Se examinan las propiedades fundamentales de los momentos de primer y segundo orden. En particular, se deducen las fórmulas que determinan las esperanzas matemáticas, dispersiones y momentos de correlación de las funciones lineales de las magnitudes aleatorias por los datos de las esperanzas matemáticas, dispersiones y momentos de correlación de las magnitudes-argumentos. Se examinan las leyes normales de distribución, bidimensional y polidimensional, y sus propiedades fundamentales.

En el cuarto capítulo se exponen los conceptos principales de la Teoría de Funciones Aleatorias. Se dan las definiciones de la función aleatoria y sus características fundamentales: las leyes de distribución de diferentes órdenes, de la esperanza matemática y la función correlativa. Se da la definición de la función de correlación mutua de dos funciones aleatorias. Se estudian las propiedades principales de las funciones correlativas y de correlación mutua. Se examinan las operaciones lineales fundamentales de la Algebra y del Análisis sobre las funciones aleatorias: adición, derivación e integración. Como un caso particular se analizan las secuencias aleatorias, sus esperanzas matemáticas y funciones correlativas. Se dan las definiciones de la cadena markoviana y el proceso aleatorio markoviano.

En el quinto capítulo se exponen los fundamentos de la Teoría de Funciones Aleatorias Estacionarias. Se presta especial atención a las representaciones espectrales de las magnitudes aleatorias estacionarias. Se introducen las nociones de densidad espectral y densidad espectral recíproca. Se da la definición del ruido blanco y se estudian sus propiedades fundamentales. Se examinan las propiedades ergódicas de las funciones aleatorias estacionarias. Se exponen los elementos de la Teoría de Secuencias Aleatorias Estacionarias.

El sexto capítulo trata de los fundamentos de la Teoría de Representaciones Canónicas de Funciones Aleatorias. Se analizan las descomposiciones canónicas y las representaciones canónicas integrales.

En el séptimo capítulo se dan las definiciones de la entropía de una magnitud aleatoria y la cantidad de información que se contiene en una magnitud aleatoria sobre otra magnitud aleatoria. Se examinan las propiedades principales de la entropía y la cantidad de información. Se demuestra la propiedad extremal de la distribución normal.

En el último, octavo capítulo se exponen los procedimientos más simples para determinar las probabilidades de acontecimientos y las características probabilistas fundamentales de magnitudes aleatorias y funciones aleatorias según los datos experimentales. En particular se examinan las cuestiones acerca de la determinación de la estimación estadística de esperanzas matemáticas, funciones correlativas y densidades espectrales de las funciones aleatorias

estacionarias ergódicas. Se expone también el método de determinación de las esperanzas matemáticas y funciones correlativas, basado sobre la diferenciación de sus realizaciones obtenidas experimentalmente.

El libro está destinado a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior, los postgraduados e ingenieros que deseen conocer la Teoría de las Probabilidades en el volumen necesario para el estudio de los fundamentos de la Teoría de Procesos de Mando, los principios teóricos de la Radiotécnica, la Teoría de precisión de los dispositivos de medición y de cálculo, la Teoría de Información y la Teoría de Comunicación.

Para alcanzar la finalidad prefijada, el autor trataba de incluir en el libro solamente lo requerido para comprender los fundamentos de las materias arriba mencionadas, evitando todo lo superfluo, es decir, lo que no halla uso directo en estas asignaturas. Esto explica también la ausencia en el libro de una parte tan amplia e importante de la Teoría de las Probabilidades como la ley de grandes números y los teoremas límite. Solamente sobre ejemplos elementales se demuestran dos teoremas principales simples, referentes a la ley de grandes números y se revela el sentido de esta ley y su importancia para las aplicaciones prácticas de la Teoría de las Probabilidades.

El libro contiene gran cantidad de ejemplos que ilustran el uso práctico de los métodos de la Teoría de las Probabilidades. Muchos de estos ejemplos se toman directamente de aquellos campos de la técnica para cuyo estudio el libro prepara al lector. Tales ejemplos dan al lector los conocimientos necesarios para el estudio posterior de las aplicaciones técnicas especiales de los métodos estadísticos Los lectores que deseen conocer la Teoría de las Probabilidades en menor volumen pueden omitir algunos capítulos y párrafos.

Así, por ejemplo, los lectores que deseen estudiar sólo los conceptos principales de la Teoría de las Probabilidades y de la Estadística Matemática pueden limitarse a leer los primeros tres capítulos y los primeros dos párrafos del octavo capítulo. En este caso se pueden omitir los §§ 2.4, 3.5 y 3.11.

Los que deseen estudiar solamente los conceptos fundamentales de la Teoría de las Probabilidades y tener una idea de las funciones aleatorias pueden añadir a los capítulos y párrafos citados los primeros cuatro párrafos del cuarto capítulo.

Los lectores que deseen estudiar los conceptos principales de la Teoría de las Probabilidades y de la Teoría de Funciones Aleatorias Estacionarias pueden limitarse a leer los primeros tres capítulos (con exclusión eventual de los §§ 2.4, 3.5 y 3.11), los primeros cuatro párrafos del cuarto capítulo, el capítulo quinto y los primeros tres párrafos del octavo capítulo.

Finalmente, los que deseen estudiar los métodos expuestos en este libro, salvo la Teoría de representaciones canónicas de las funciones aleatorias, pueden omitir el sexto capítulo sin que se dificulte la comprensión de los dos últimos capítulos. Sin embargo, el autor no recomienda hacerlo, puesto que actualmente sólo el método de representaciones canónicas de las funciones aleatorias ofrece la posibilidad de enfocar desde un punto de vista único el estudio de la moderna Teoría Estadística de los sistemas automáticos óptimos.

El libro puede servir de base para un curso semestral de la Teoría de las Probabilidades, que comprende 60—70 horas de conferencias, en los centros de enseñanza técnica superior de especialidades correspondientes.

Al autor le gustaría expresar un profundo reconocimiento a I. N. Sinizin por su ayuda y cortesía inapreciables en la preparación de este libro. El autor agradece también a E. S. Ventzel, L. A. Ovcharov y E. S. Kochetkov que han leído atentamente el original y con sus observaciones críticas y discusiones han contribuido a mejorarlo esencialmente.

V. S. Pugachev

CAPITULO 1

Probabilidad de un acontecimiento

§ 1.1. Objeto de la Teoría de las Probabilidades. Significado de los métodos estadísticos

Cada fenómeno del mundo que nos rodea se halla enlazado, más o menos estrechamente, con un conjunto infinito de otros hechos. Toda ciencia estudia solamente cierto número finito de vínculos. De tal modo se establecen las regularidades fundamentales de los fenómenos estudiados que reflejan las conexiones internas principales inherentes a estos últimos. En principio, es imposible llegar a conocer toda la diversidad infinita de relaciones existentes en cualquier fenómeno dado.

En cada etapa del conocimiento humano siempre queda sin estudiar una multitud infinita de vínculos propios a un cierto fenómeno. En consecuencia, cada regularidad puede reflejar solamente un número finito de relaciones fundamentales, debido a lo cual las leyes se cumplen sin precisión, con ciertas desviaciones. Las desviaciones de lo regular originadas por una infinidad de vínculos no previstos en el fenómeno dado, se llaman *fenómenos aleatorios*. De este modo, la casualidad existe objetivamente en el mundo que nos rodea, porque en principio no es posible revelar todos los nexos accidentales entre el fenómeno estudiado y la multiplicidad infinita de otros sucesos.

A medida que va desarrollándose la ciencia, llegan a ser conocidas nuevas leyes, o sea, las conexiones que tiene el fenómeno estudiado con distintos factores. Por eso, las fronteras entre lo regular y lo casual no permanecen inalterables sino que cambian a medida que crece el conocimiento humano. Lo que en un período del desarrollo de la ciencia es accidental puede hacerse regular en otro período. Y al contrario, en los fenómenos considerados como estrictamente regulares en una etapa del desarrollo de la ciencia, a consecuencia de los perfeccionamientos en la técnica del experimento y las exigencias más rigurosas en lo que se refiere a la precisión durante el examen de las dependencias, se descubren desviaciones accidentales de las leyes y surge la necesidad de tenerlas en cuenta.

Si el fenómeno dado se observa una sola vez, no se puede predecir de antemano cuál será justamente la desviación accidental de lo regular. Así, por ejemplo, al efectuar cualquier medición, es imposible prever cuál será el error de la misma. Sin embargo, si el número

de observaciones del fenómeno dado se hace grande, en las mismas desviaciones accidentales se descubren ciertas regularidades que pueden ser estudiadas y utilizadas para determinar la influencia de las desviaciones mencionadas sobre el curso de los fenómenos por estudiar. Así pues, aparece la posibilidad de investigar *fenómenos aleatorios frecuentes*, es decir, tales fenómenos aleatorios que prácticamente pueden ser observados un número ilimitado de veces en las mismas condiciones. La Teoría de las Probabilidades es precisamente la ciencia que estudia las regularidades en los fenómenos aleatorios frecuentes.

La historia del desarrollo de la ciencia pone en relieve que muchas ramas de la ciencia en cierta etapa de su desarrollo se ven obligadas a tener en consideración las desviaciones aleatorias con respecto a lo regular e investigar la influencia de las mismas sobre el curso de los procesos que se estudian.

En la etapa inicial, cada ciencia aplicada estudia solamente las regularidades fundamentales de los fenómenos examinados. Con ello, a causa de la imperfección y baja precisión de los instrumentos de medida, así como por reducidas exigencias a la precisión de las dependencias obtenidas, no se revelan fenómenos aleatorios ni aparece la necesidad de tenerlos en cuenta. Pero, a medida que se desarrolla cualquier rama de la ciencia siempre surge, en cierta etapa, la necesidad de tener en consideración las desviaciones accidentales y su influencia sobre el curso de los fenómenos por estudiar. A causa de eso, toda rama aplicada de la ciencia tiene que acudir a la Teoría de las Probabilidades y cada día se amplían más los campos de aplicación de los métodos *probabilísticos* o como se les suele llamar *estadísticos*. Así, por ejemplo, antes en la Hidrodinámica y la Aerodinámica se estudiaban solamente las regularidades fundamentales, mas en la tercera década de nuestro siglo, al descubrir que los fenómenos de turbulencia podían ser estudiados con éxito valiéndose de los métodos estadísticos, apareció la teoría estadística de turbulencia.

Antes, la teoría de regulación automática y radiotécnica estudiaban solamente las regularidades principales que se empleaban en la práctica de proyección de las unidades industriales correspondientes. Sin embargo, durante los últimos dos decenios los métodos estadísticos se usan ampliamente en la teoría de regulación automática y en la radiotécnica. Se puede decir que toda la teoría moderna de recepción de las señales de radio es una teoría estadística; en el campo de la automatización los métodos estadísticos han llegado a ser uno de los principales instrumentos de investigación sin los cuales muchos problemas de la teoría moderna de regulación automática y de la teoría de dirección (Cibernética), no pueden ser resueltos.

§ 1.2. Fundamentos experimentales de la Teoría de las Probabilidades

Cada ciencia se basa sobre algunos hechos experimentales que sirven para formar los conceptos fundamentales de la misma. Estos hechos y conceptos se utilizan para desarrollar la teoría científica y para obtener determinadas conclusiones prácticas. Y por fin, las conclusiones de la ciencia se comprueban por la práctica. La coincidencia de las conclusiones científicas con los resultados prácticos es el criterio de validez de una teoría científica.

Examinemos cómo se pueden estudiar experimentalmente los fenómenos aleatorios y caracterizar los resultados de este estudio. Para ello daremos la definición de algunas nociones iniciales.

Se llama *experimento* (*prueba*) a cada realización de condiciones y acciones determinadas en las cuales se observa el fenómeno aleatorio que se estudia. Pueden servir de ejemplos, la medición de cierta magnitud o el tiro contra un objetivo determinado, el registro de la señal de salida de un sistema automático durante cierto lapso de tiempo, la elección al azar de algún objeto que se halla en un conjunto de objetos semejantes.

El resultado del experimento puede ser caracterizado *cualitativa* y *cuantitativamente*. Cualquier característica cualitativa del resultado del experimento se llama *acontecimiento* (*suceso*). Por ejemplo, el hecho de que al medir cierta magnitud el resultado de la medición sea igual al número dado o menor que éste, es un acontecimiento. También son acontecimientos, el impacto o el fallo al producir un disparo.

El acontecimiento se denomina *cierto*, si éste se produce obligatoriamente como resultado del experimento en cuestión. Se llama *imposible* al acontecimiento que no puede suceder como resultado del experimento dado. Se denomina *aleatorio* al acontecimiento que, como resultado del experimento dado, puede ocurrir o no.

Cualquier característica cuantitativa del experimento se llama *magnitud aleatoria*. De ejemplos pueden servir el resultado de la medición de cierta magnitud y las coordenadas de los puntos de impacto al producir un disparo. También son magnitudes aleatorias las ordenadas de la curva que se obtiene al registrar una variable por ejemplo, la señal de salida de un sistema automático.

Examinemos la sucesión de n experimentos iguales. Supongamos que, como resultado de cada experimento, se registra la llegada o no llegada de un acontecimiento A. En esta sucesión, una característica natural del acontecimiento A es *la frecuencia* de su producción, es decir, la relación entre el número de veces que este acontecimiento se produce y el número de todos los experimentos realizados. Designando la frecuencia del acontecimiento A por $P^*(A)$, se puede

escribir

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.2.1)$$

donde m es el número de veces que se produce el acontecimiento A al realizar n experimentos.

Estudiemos las propiedades fundamentales de las frecuencias de los acontecimientos. Ante todo, está claro que la frecuencia de cualquier acontecimiento representa una fracción propia o es igual a cero o a la unidad:

$$0 \leqslant P^*(A) \leqslant 1. \qquad (1.2.2)$$

Llamaremos *incompatibles*, en el experimento dado, a dos acontecimiento A y B, si en este experimento la producción de uno de ellos excluye la aparición del otro. De ejemplo puede servir el impacto o el fallo al producirse un solo tiro. Es necesario señalar que la noción de compatibilidad o incompatibilidad de acontecimientos siempre está relacionada con qué experimento precisamente se tiene en cuenta. Los mismos acontecimientos A y B pueden resultar incompatibles en un experimento y compatibles en otro. Así, por ejemplo, el impacto y el fallo son acontecimientos incompatibles, si el experimento consiste en producir un solo tiro y son compatibles si la prueba prevé varios tiros.

Ahora bien, supongamos que los acontecimientos A y B son incompatibles en el experimento dado y que éste se repite n veces. Supongamos que para nosotros no tiene ninguna importancia, cuál será el acontecimiento que llegará: A ó B. Con otras palabras, nos interesa un acontecimiento compuesto que consiste en que ocurra el acontecimiento A o el acontecimiento B, indiferentemente de cuál de ellos precisamente. Supongamos que en calidad de experimento compramos un billete de lotería con el fin de ganar un coche o una moto. Sea el acontecimiento A la ganancia de un coche y el acontecimiento B, la ganancia de una moto. En este caso nos interesa un acontecimiento compuesto que consiste en que ganaremos un medio de transporte, indiferentemente de cuál de ellos: un coche o una moto. Es evidente que, en este caso, los acontecimientos A y B son incompatibles, porque un billete puede ganar un solo premio.

Supongamos que como resultado de n experimentos se produjo m veces el acontecimiento A y l veces el acontecimiento B. Por consiguiente, el acontecimiento compuesto «A ó B» se produjo $m + l$ veces y su frecuencia es igual a

$$P^*(A \text{ o } B) = \frac{m+l}{n}. \qquad (1.2.3)$$

Mas en el caso en cuestión, las frecuencias de los acontecimientos A y B equivalen respectivamente a m/n y l/n. Por lo tanto, la igual-

dad (1.2.3) se puede escribir así:

$$P^*(A \text{ o } B) = P^*(A) + P^*(B). \qquad (1.2.4)$$

Esta fórmula expresa *el teorema de adición de frecuencias* que dice: la frecuencia del surgimiento de uno de dos acontecimientos incompatibles, no importa precisamente de cuál se trata, es igual a la suma de las frecuencias de estos acontecimientos.

Un acontecimiento compuesto que representa la producción por lo menos de uno de varios acontecimientos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se llama *suma*

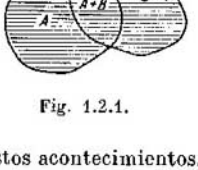


Fig. 1.2.1.

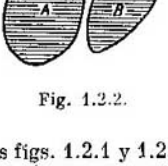


Fig. 1.2.2.

o *unión* de estos acontecimientos. En las figs. 1.2.1 y 1.2.2 se muestra la suma de dos acontecimientos como el campo contorneado por una línea gruesa. La fig. 1.2.1 corresponde al caso cuando los acontecimientos A y B son compatibles y la fig. 1.2.2, al caso cuando A y B son incompatibles.

Según la definición de la suma de acontecimientos, el acontecimiento «A o B» se puede escricir también en la forma $A + B$ y la igualdad (1.2.4) que expresa el teorema de adición de frecuencias, se puede escribir así:

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B). \qquad (1.2.5)$$

El teorema de adición de frecuencias es válido para cualquier número de acontecimientos incompatibles. Los acontecimientos $A_1, \ldots, A_n$ se llaman *incompatibles* si ningún par de ellos pueden producirse juntos. Si los acontecimientos $A_1, \ldots, A_n$ son incompatibles, entonces:

$$P^*\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P^*(A_i). \qquad (1.2.6)$$

Es fácil demostrar esta fórmula directamente, igual que para el caso de dos acontecimientos incompatibles, o bien aplicando el método de inducción matemática.

La fórmula (1.2.6) expresa el teorema general de adición de frecuencias: la frecuencia de producción de uno de los acontecimientos incompatibles, no importa precisamente de cuál se trata, es igual a la suma de las frecuencias de estos sucesos.

En algunos casos, surge la necesidad de examinar varios acontecimientos en correlación, por ejemplo, cuando hay que determinar, cómo influye la aparición o no aparición de un acontecimiento sobre la frecuencia del surgimiento de otro. En este caso, además de la frecuencia del acontecimiento A, para toda la serie de experimentos realizados, se calcula también la frecuencia del acontecimiento A teniendo en cuenta sólo aquellas pruebas que han llevado a la producción de otro acontecimiento B que nos interesa. Con otras palabras, antes de determinar la frecuencia del acontecimiento A se seleccionan sólo aquellos experimentos en los que ha sucedido el acontecimiento B sin tomar en consideración los demás. La frecuencia del acontecimiento A calculada sólo para aquellas pruebas en las que se ha producido el acontecimiento B se llama *frecuencia condicional* del acontecimiento A con respecto al acontecimiento B y se designa por $P^*(A \mid B)$. Si al efectuar n experimentos el acontecimiento B ha sucedido l veces y el acontecimiento A ha sucedido junto con el acontecimiento B k veces, entonces la frecuencia condicional del acontecimiento A con respecto a B es igual a

$$P^*(A \mid B) = \frac{k}{l}. \tag{1.2.7}$$

Puesto que las fracciones l/n y k/n representan respectivamente la frecuencia del acontecimiento B y la de la producción conjunta de los acontecimientos A y B, la fórmula (1.2.7) puede ser escrita así:

$$P^*(A \mid B) = \frac{P^*(A \text{ y } B)}{P^*(B)}. \tag{1.2.8}$$

De modo análogo se determina la frecuencia condicional del acontecimiento B con respecto a A, como la frecuencia del acontecimiento B calculada teniendo en cuenta sólo aquellas pruebas en las que se ha producido el acontecimiento A:

$$P^*(B \mid A) = \frac{P^*(A \text{ y } B)}{P^*(A)}. \tag{1.2.9}$$

Las fórmulas (1.2.8) y (1.2.9), que se pueden escribir en la forma

$$P^*(A \text{ y } B) = P^*(A)\, P^*(B \mid A) = \\ = P^*(B)\, P^*(A \mid B), \tag{1.2 10}$$

expresan el teorema de multiplicación de frecuencias que dice: la frecuencia de la producción conjunta de dos acontecimientos es igual a la frecuencia de uno de ellos multiplicada por la frecuencia condicional del otro con respecto al primero.

El acontecimiento que representa la llegada a la vez de varios acontecimientos suele llamarse *producto* o *intersección* de estos últimos. En la fig. 1.2.3 el producto de los acontecimientos A y B se muestra como la parte común (sombreada) de los campos corres-

pondientes. Valiéndose de la definición del producto de acontecimientos, el acontecimiento «A y B» se puede presentar como el producto AB. Entonces el teorema de multiplicación de frecuencias, expresada por la fórmula (1.2.10), se escribirá en la forma

$$P^*(AB) = P^*(A)\,P^*(B \mid A) = P^*(B)\,P^*(A \mid B). \tag{1.2.11}$$

Comparando la frecuencia condicional del acontecimiento A respecto al B con la del acontecimiento A tomada en toda la serie de experimentos efectuados (llamada corrientemente *incondicional*), se puede estimar la correlación de los acontecimientos A y B. Si al realizar un gran número de pruebas la frecuencia condicional del acontecimiento A respecto al B es aproximadamente igual a la incondicional del acontecimiento A, esto quiere decir que el número total de veces que sucede el acontecimiento A se divide más o menos proporcionalmente entre aquellos experimentos en los que el acontecimiento B se ha producido y aquellos en los que éste no se ha producido. Esto puede servir como indicio de que el acontecimiento A no depende del B. Si la frecuencia condicional del acontecimiento A respecto al B se diferencia considerablemente de la frecuencia incondicional del acontecimiento A, esto puede servir de indicio de que hay cierta relación entre los acontecimientos A y B.

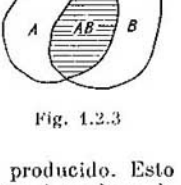


Fig. 1.2.3

Aplicando el método de inducción matemática, se puede extender el teorema de multiplicación de frecuencias para un número arbitrario de acontecimientos. Como resultado se obtiene que

$$P^*(A_1A_2 \ldots A_n) = \\ = P^*(A_1)\,P^*(A_2 \mid A_1) \ldots P^*(A_n \mid A_1A_2 \ldots A_{n-1}) \tag{1.2.12}$$

con ello, el orden de numeración de los acontecimientos no tiene importancia y puede ser establecido arbitrariamente.

Ahora bien, pasemos al problema del estudio experimental de magnitudes aleatorias. De acuerdo con la definición general dada, se llama aleatoria toda magnitud que, como resultado de un experimento, no toma más que un valor cualquiera, y como resultado de varios experimentos, puede tomar valores diferentes. Cada valor que puede ser tomado por la magnitud aleatoria, como consecuencia del experimento, se llama su *valor posible*. Designaremos a las magnitudes aleatorias con letras mayúsculas, principalmente con las últimas letras del alfabeto latino, y a sus valores posibles, con las minúsculas correspondientes. Por ejemplo, a las magnitudes aleatorias las designaremos con las letras X, Y, Z y sus valores posibles, con las letras x, y, z respectivamente. Con toda magnitud aleatoria X se

puede enlazar el acontecimiento A que representa el cumplimiento de la desigualdad $X < x$, donde x es el número dado. Entonces, se puede determinar la frecuencia del acontecimiento A para diferentes valores de x. Como resultado obtendremos la función

$$F^*(x) = P^*(X < x), \tag{1.2.13}$$

llamada ordinariamente *función estadística de distribución* de la magnitud aleatoria X. Para estudiar las propiedades de la función estadística de distribución, supongamos que, como resultado de

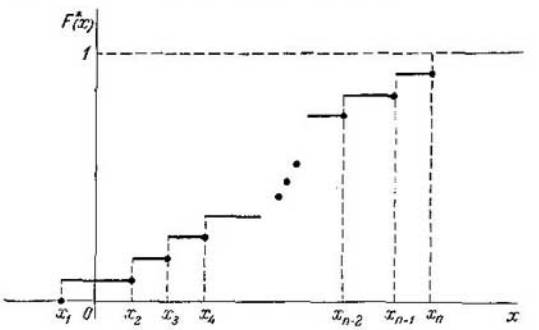


Fig. 1.2.4

n experimentos, la magnitud aleatoria X ha tomado ciertos valores que numeraremos en el orden de no decrecimiento: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (fig. 1.2.4). Es evidente que para todo valor de x en el intervalo de $x_k < x \leqslant x_{k+1}$, el número de experimentos en los que ha sido cumplida la desigualdad $X < x$ es igual a k. Por consiguiente,

$$F^*(x) = \frac{k}{n} \text{ si } x_k < x \leqslant x_{k+1} \ (k = 1, \ldots, n-1). \tag{1.2.14}$$

Para todo valor de $x \leqslant x_1$, el número de experimentos en los que ha sido cumplida la desigualdad $X < x$ es igual a cero y para cualquier valor de $x > x_n$, el número de experimentos en los que ha sido cumplida la desigualdad $X < x$ es igual a n. Por lo tanto, la función estadística de distribución de la magnitud aleatoria X representa una función escalonada, igual a cero en todos los puntos del eje numérico que se hallan a la izquierda de todos los puntos $x_1, \ldots, x_n$ correspondientes a los valores que ha tomado la magnitud aleatoria X como resultado de los experimentos efectuados; e igual a la unidad en todos los puntos del eje numérico que se encuentran a la derecha de todos los puntos $x_1, \ldots, x_n$ (fig. 1.2.4). Si el punto x pasa a través de un punto cualquiera $x_1, \ldots, x_n$ que no coincide con nin-

gún otro de estos puntos, la función estadística de distribución se incrementa de un salto en $1/n$. Si l puntos cualesquiera de los $x_1, \ldots, x_n$ coinciden, entonces, al pasar el punto x a través de este punto «múltiplo de l», la función estadística de distribución se incrementa de un salto en l/n.

La función estadística de distribución es una característica completa de los resultados de la observación de una magnitud aleatoria en la serie dada de experimentos. Sin embargo, a veces es conveniente limitarse a una característica más simple, aunque no sea completa, de la magnitud aleatoria, valiéndose de varios números. En la serie dada de experimentos, la característica numérica más simple de la magnitud aleatoria X es su valor medio aritmético

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.2.15}$$

En caso de que l valores cualesquiera, de $x_1, \ldots, x_n$, tomados por la magnitud aleatoria X como resultado de n experimentos, coincidan, el coeficiente de este valor general de x_i en la fórmula (1.2.15) es igual a la frecuencia de aparición de este valor l/n. Así, por ejemplo, si $x_1 = \ldots = x_{l_1} = a_1$, $x_{l_1+1} = \ldots = x_{l_1+l_2} = a_2, \ldots, x_{l_1+\ldots+l_{k-1}+1} = \ldots = x_{l_1+\ldots+l_k} = x_n = a_k$, la fórmula (1.2.15) toma la forma

$$m_x^* = \sum_{r=1}^{k} \frac{l_r}{n} a_r. \tag{1.2.16}$$

Por lo tanto, el valor medio de una magnitud aleatoria, en la serie dada de experimentos, es igual a la suma de todos los valores tomados por esta magnitud, multiplicados por las frecuencias de dichos valores. Con otras palabras, el valor medio de una magnitud aleatoria no es más que su valor medio pesado, con la particularidad de que los pesos de los valores tomados por la magnitud aleatoria son iguales a las frecuencias correspondientes.

Es fácil comprender que el valor medio de una magnitud aleatoria se puede interpretar como el centro de gravedad de sus valores obtenidos como resultado de los experimentos (si, claro está, se considera que los valores tienen igual peso).

Para caracterizar la dispersión de los valores de la magnitud aleatoria X en la serie dada de experimentos, se puede utilizar el valor medio de alguna medida positiva de desviación de la magnitud aleatoria con respecto a su valor medio. En calidad de medida positiva de desviación de una magnitud aleatoria con respecto a su valor medio, lo más cómodo es hacer uso del cuadrado de la diferencia entre el valor de la magnitud aleatoria y su valor medio. Enton-

ces, como característica de la dispersión de los valores de la magnitud aleatoria X en la serie dada de experimentos, se obtendrá la magnitud

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_x^*)^2, \tag{1.2.17}$$

generalmente llamada *dispersión estadística* de la magnitud aleatoria X.

Es evidente que la dispersión estadística tiene la misma dimensión que el cuadrado de la magnitud aleatoria dada. Sin embargo, en la práctica, para caracterizar la dispersión, es más conveniente valerse de una magnitud que tenga la misma dimensión que la magnitud aleatoria en cuestión. Para obtener tal característica, es suficiente extraer la raíz cuadrada de la dispersión estadística. Por consiguiente, como medida práctica de la dispersión de los valores de la magnitud aleatoria X, en la serie dada de experimentos, puede servir su *desviación estadística cuadrática media* que no es más que la raíz cuadrada positiva de su dispersión estadística:

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2} \tag{1.2.18}$$

Si algunos valores de x_i tomados por la magnitud aleatoria X coinciden, entonces coinciden también los sumandos correspondientes en las fórmulas (1.2.17) y (1.2.18) y se les puede unir. De este modo, la dispersión esdadística se expresará mediante los valores de $a_1, \ldots, a_k$ tomados por la magnitud aleatoria, y las frecuencias de los mismos, por la fórmula.

$$D_x^* = \sum_{r=1}^{k} \frac{l_r}{n} (a_r - m_x^*)^2 \tag{1.2.19}$$

Puesto que la magnitud $1/n$ representa el incremento de la función estadística de distribución de la magnitud aleatoria en cada uno de los puntos $x_1, \ldots, x_n$, las fórmulas (1.2.15) y (1.2.17) se puede escribir en la forma

$$m_x^* = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta F^*(x_i), \tag{1.2.20}$$

$$D_x^* = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2 \Delta F^*(x_i). \tag{1.2.21}$$

Ejemplo 1.2.1. Hallar la función estadística de distribución, el valor medio, la dispersión estadística y la desviación estadística cuadrática media de la magnitud aleatoria X según los resultados de los 20 experimentos presentados en la tabla.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	4,4	6,1	5,1	4,9	5,9	4,1	5,6	6,7	4,3	5,0
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	7,7	4,0	4,2	5,8	2,0	6,5	3,2	4,8	5,2	2,6

En el caso dado, la función estadística de distribución se muestra en la fig. 1.2.5. Sustituyendo los valores de x_i por los de la tabla en las fórmulas

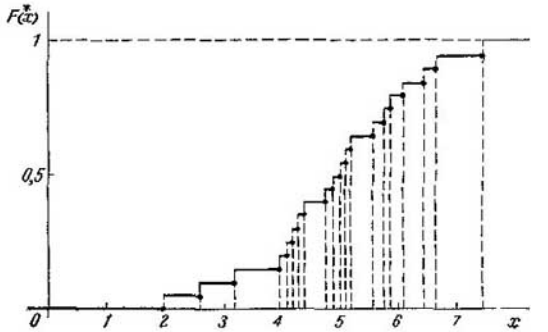


Fig. 1.2.5.

(1.2.15) y (1.2.17), hallamos el valor medio y la dispersión estadística de la magnitud aleatoria:

$$m_x^* = \frac{97,9}{20} \approx 4,9, \qquad D_x^* \approx \frac{36,8}{20} \approx 1,8.$$

La desviación estadística cuadrática media de la magnitud aleatoria, en el caso dado es igual a

$$\sigma_x^* \approx \sqrt{1,8} \approx 1,4.$$

Como ha sido señalado anteriormente, debido a los errores de medida, el resultado de la medición de cualquier valor siempre es una magnitud aleatoria. Repitiendo varias veces la medición obtendremos resultados diferentes. Basándose en lo expuesto, si falta un error sistemático, la media aritmética de todos los resultados de medi-

ción puede servir de medida del valor real de la magnitud que se mide, y la desviación estadística cuadrática media, así como la dispersión estadística, puede servir como característica de la precisión de medición. Cuanto menor sea la desviación estadística cuadrática media, tanto más estrechamente se agruparán los resultados de las mediciones en torno a su valor medio aritmético, y tanto más precisa será la medición. Así pues, las características numéricas examinadas de una magnitud aleatoria tienen un sentido práctico bien determinado.

Al estudiar los fenómenos aleatorios, hay que caracterizar con frecuencia el resultado del experimento no de una sola magnitud aleatoria sino de varias o incluso de una infinidad de las mismas. Por ejemplo, el movimiento del aire en un punto va caracterizado, en un momento determinado de tiempo, por tres componentes del vector de la velocidad del viento. Al registrar la señal de salida de un sistema automático o la señal de entrada en un receptor de radio, se caracteriza el resultado de esta prueba por el conjunto de ordenadas de la curva obtenida, que son precisamente magnitudes aleatorias. En tales casos, además de las características examinadas, que se pueden calcular por separado para cada una de las magnitudes aleatorias que nos interesan, hay que introducir cierta magnitud que caracterice el grado de dependencia entre las magnitudes aleatorias. En calidad de tal característica del grado de dependencia entre las magnitudes aleatorias X e Y, en la serie dada de n experimentos, se puede tomar *el momento correlativo estadístico* de las mismas

$$k^*_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m^*_x)(y_i - m^*_y). \qquad (1.2.22)$$

En esta fórmula x_i, y_i son los valores que han tomado las magnitudes aleatorias X, Y como resultado del i-ésimo experimento ($i = 1, \ldots, n$) y m^*_x, m^*_y son los valores medios aritméticos de las magnitudes X, Y:

$$m^*_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad m^*_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (1.2.23)$$

Para comprender que el momento correlativo estadístico puede, en un grado determinado, caracterizar la dependencia entre las magnitudes aleatorias X, Y, basta reparar en que si no existe ninguna relación entre X y Y, en cada banda estrecha de la anchura de Δx, paralela al eje y (fig. 1.2.6), el centro de gravedad de los puntos dispuestos en esta banda se encuentra aproximadamente en la recta $y = m^*_y$, dondequiera que se halla elegida dicha banda, si el número de experimentos n es lo suficiente grande. Dividiendo toda la parte

del plano xy que contiene los puntos experimentales $(x_1, y_1), \ldots$ $\ldots, (x_n, y_n)$, en bandas estrechas, se puede dividir también la suma que figura en la fórmula (1.2.22) en sumas parciales correspondientes a diferentes bandas. Para todos los puntos que se hallan en los límites de una banda, la magnitud $x_i - m_x^*$ tendrá aproximadamente un mismo valor que puede ser sacado fuera del signo de la suma. En el caso de las magnitudes independientes X, Y, la suma restante será, según lo expuesto, próxima a cero, si el número de experimentos n es lo sufuciente grande. De este modo, en caso de que las magnitudes X, Y sean independientes, el momento correlativo estadístico debe ser próximo a cero, si el número de experimentos es lo suficiente

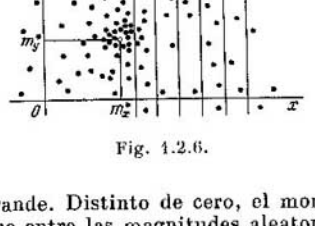


Fig. 1.2.6.

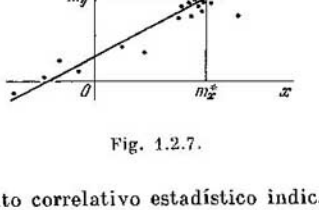


Fig. 1.2.7.

grande. Distinto de cero, el momento correlativo estadístico indica que entre las magnitudes aleatorias X, Y existe cierta relación. En la fig. 1.2.6. se muestra la distribución de los puntos experimentales en el plano xy cuando entre las magnitudes aleatorias X, Y no existe una relación evidente. En la fig. 1.2.7 se da la distribución de los puntos experimentales en el caso en que la relación entre las magnitudes aleatorias X, Y es muy visible.

Es necesario señalar que tratándose de la dependencia o independencia entre las magnitudes aleatorias, se puede por ahora dar a estas nociones sólo un sentido intuitivo basado sobre nuestras ideas generales acerca de la posibilidad de representar las dependencias entre las magnitudes en forma de gráficos. Así, por ejemplo, la distribución de los puntos experimentales expuesta en la fig. 1.2.7 da motivo para trazar una recta cuya ecuación puede, con cierto grado de precisión, caracterizar la dependencia entre las magnitudes aleatorias X, Y. Por el contrario, la distribución de los puntos experimentales expuesta en la fig. 1.2.6 no da lugar a la representación aproximada de la dependencia entre las coordenadas en forma de una curva.

Ejemplo 1.2.2. Hallar las dispersiones estadísticas y el momento correlativo estadístico de las magnitudes aleatorias X, Y según los resultados de su observación en 20 experimentos representados en la fig. 1.2.8. Las coordenadas de los puntos experimentales están asignadas en la tabla.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,8	−0,9	−0,2	0,2	−3,0	0,9	1,5	−1,0	0,1	−0,2
y_i	1,1	−1,6	−0,2	0,0	−2,0	−0,1	1,1	0,1	1,9	−0,9
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	1,1	−2,4	−0,8	2,7	0,6	−0,8	−0,6	0,0	1,7	−1,8
y_i	−1,2	−1,1	−0,1	1,9	0,6	−0,8	1,1	−0,5	0,5	−1,9

Al principio, hallemos los valores medios de las magnitudes aleatorias X, Y sirviéndonos de las fórmulas (1.2.23):

$$m_x^* = \frac{-2,1}{20} \approx -0,1, \quad m_y^* = \frac{-2,1}{20} \approx -0,1.$$

Sustituyendo estos valores y los valores tomados por las magnitudes aleatorias X, Y, como resultado de los experimentos examinados, en las fórmulas

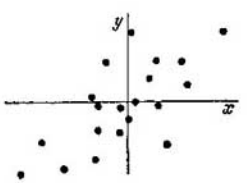


Fig. 1.2.8.

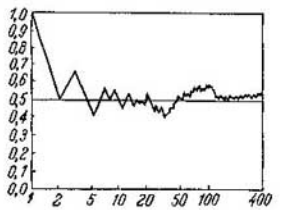


Fig. 1.2.9.

(1.2.17) y (1.2.22), hallamos las dispersiones estadísticas de las magnitudes aleatorias mencionadas:

$$D_x^* \approx \frac{36,8}{20} \approx 1,8,$$

$$D_y^* \approx \frac{25,8}{20} \approx 1,3$$

y su momento correlativo estadístico:

$$k_{xy}^* \approx \frac{21,1}{20} \approx 1,1.$$

De ese modo, en el caso dado hay razón para considerar a las magnitudes aleatorias X, Y como enlazadas por cierta dependencia.

Si se aumenta ilimitadamente el número de experimentos y después de cada experimento se determina la frecuencia de acontecimientos y las características de las magnitudes aleatorias, teniendo en cuenta todos los experimentos ya realizados, se puede advertir que a medida que aumenta el número de experimentos, las frecuencias de los acontecimientos y las características de las magnitudes aleatorias tienden a estabilizarse cerca de ciertos valores. A título de ejemplo, en la fig. 1.2.9 se muestra el gráfico de la frecuencia con que sale el escudo en función del número de lanzamientos de la moneda n *). Para mayor comodidad, en el eje de abscisas está trazado el logaritmo del número de lanzamientos. Como vemos, a medida que aumenta el número de experimentos, la amplitud de las oscilaciones de la frecuencia disminuye y la frecuencia con que sale el escudo llega a ser próxima a la mitad. Puesto que la función estadística de distribución de una magnitud aleatoria no es más que un conjunto de frecuencias correspondientes a diferentes valores de x, y en las fórmulas (1.2.16) y (1.2.19) también entran las frecuencias de los correspondientes valores posibles de dicha magnitud, está claro que también la función estadística mencionada, su valor medio aritmético y la dispersión estadística, así como el momento correlativo estadístico de dos magnitudes aleatorias deben tender a estabilizarse al aumentar ilimitadamente el número de experimentos. Por supuesto, este razonamiento no puede de ningún modo considerarse como demostración de la estabilidad de las características de las magnitudes aleatorias al aumentar el número de experimentos, sino que solamente ayuda a comprender la esencia de este fenómeno que se observa en la práctica.

La estabilidad de las frecuencias de los acontecimientos y de las características de las magnitudes aleatorias cuando el número de experimentos es grande, representa la regularidad principal de fenómenos aleatorios frecuentes, es decir, tales fenómenos que se pueden observar un número indefinido de veces. Esto sirve de base para introducir las correspondientes características teóricas abstractas de los acontecimientos y de las magnitudes aleatorias, que no dependen del experimento, cuyo conocimiento permitiría estimar la conducta de los acontecimientos y de las magnitudes aleatorias, cuando el número de experimentos fuera grande, sin realizar estos últimos.

§ 1.3. Probabilidad del acontecimiento y sus propiedades

La probabilidad es la característica teórica fundamental de un acontecimiento aleatorio. Se llama *probabilidad* de un acontecimiento al número que caracteriza la frecuencia de este acontecimiento

*) H. Cramer. Mathematical Methods of Statistics. Princeton Univ. Press, 1946 (Versión rusa: H. Cramer. Métodos matemáticos de Estadística. Editorial de Literatura Extranjera, 1948).

al ser grande la cantidad de experimentos, es decir, tal número cerca del cual tiende a estabilizarse la frecuencia del acontecimiento si la cantidad de pruebas aumenta indefinidamente. De este modo, la probabilidad de un acontecimiento representa su frecuencia «teórica». Conociendo la probabilidad de un acontecimiento, se puede, sin realizar ningunas pruebas, predecir cuál será la frecuencia con que aparecerá el acontecimiento al ser grande el número de experimentos. Se puede también decir que la probabilidad de un acontecimiento es la medida de la posibilidad de suceder un acontecimiento efectuando una sola prueba. Si la posibilidad de un acontecimiento es muy pequeña, éste aparecerá muy raramente al realizar un gran número de experimentos. En este caso, al prepararnos para efectuar una sola prueba, prácticamente podemos estar seguros de que el acontecimiento no sucederá. Por el contrario, si la probabilidad de un acontecimiento difiere muy poco de la unidad, al prepararnos para realizar un solo experimento, prácticamente podemos estar seguros de que el acontecimiento sucederá. Hablamos aquí de seguridad práctica y no de seguridad absoluta porque, al prepararnos para realizar una sola prueba, no podemos prever con absoluta precisión cuál será su resultado. Este experimento puede pertenecer a alguna de aquellas raras pruebas en las que un acontecimiento de poca probabilidad sucede, mientras que un acontecimiento de probabilidad próxima a la unidad no sucede.

La frecuencia de un acontecimiento imposible siempre es igual a cero y la de un acontecimiento cierto siempre es igual a la unidad. Por eso, según la definición dada de probabilidad, la probabilidad igual a cero debe ser atribuida a la probabilidad de un acontecimiento imposible y la probabilidad igual a la unidad, a un acontecimiento cierto. Sin embargo, a continuación veremos que existen también acontecimientos aleatorios que tienen la posibilidad igual a cero o a la unidad. De este modo, si la probabilidad de un acontecimiento es igual a cero (a la unidad), esto no significa todavía que el acontecimiento es imposible (cierto). Esto significa solamente que, al aumentar indefinidamente el número de experimentos, la frecuencia del acontecimiento tenderá a cero (a la unidad).

La probabilidad de un acontecimiento A se designa por el símbolo $P(A)$.

En algunos casos, la probabilidad de un acontecimiento se puede determinar fácilmente teniendo en consideración la simetría de los resultados de los experimentos. Así, por ejemplo, si el número de lanzamientos de una moneda perfecta es grande, el escudo y la cifra saldrán prácticamente con igual frecuencia. Por eso, al arrojar al aire una moneda, al acontecimiento representado por la salida del escudo se le debe atribuir la probabilidad igual a 1/2. Lo mismo, al echar un dado perfectamente fabricado que tiene la forma de cubo, las seis caras, debido a su simetría, han de salir con frecuencias

iguales, si el número de pruebas es grande. Por consiguiente, la frecuencia del acontecimiento, representado por la salida del número de puntos múltiplo de tres, debe tener la tendencia de estabilizarse cerca del valor igual a 2/6-1/3, al ser indefinidamente grande el número de experimentos. Así pues, la probabilidad de que salga el número de puntos múltiplo de tres, al arrojar el dado una sola vez, es igual a 1/3.

Es evidente, que la probabilidad de un acontecimiento no puede ser negativa ni tener un valor mayor que la unidad, o sea para todo acontecimiento A

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{1.3.1}$$

Las probabilidades de acontecimientos, como números que representan frecuencias teóricas de acontecimientos cerca de las cuales tienden a estabilizarse las frecuencias reales al aumentar indefinidamente el número de pruebas, deben poseer todas las propiedades de las frecuencias. En particular, en virtud del teorema de adición de frecuencia, demostrado en el párrafo anterior, se admite el siguiente *principio de adición de probabilidades*: la probabilidad de producción de uno de los acontecimientos incompatibles, no importa de cuál se trate precisamente, es igual a la suma de probabilidades de los mismos:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \tag{1.3.2}$$

Este principio se admite tanto para un número finito cualquiera de acontecimientos A_i como, en el límite, para un conjunto numerable de acontecimientos A_i*).

Se dice que los acontecimientos $E_1, \ldots, E_n$ forman *un grupo completo*, si, como resultado del experimento, se produce obligatoriamente uno de ellos, por lo menos, es decir, si la suma $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ representa un acontecimiento cierto. De esta definición y del principio de adición de probabilidades se deduce que la suma de las probabilidades de los acontecimientos incompatibles que forman un grupo completo es igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1. \tag{1.3.3}$$

Dos acontecimientos incompatibles que forman un grupo completo se llaman *contradictorios*. A todo acontecimiento A le corresponde un acontecimiento contradictorio $\bar{A}$ que representa la no producción del acontecimiento A. De (1.3.3) se desprende que la suma de las

*) Se llama *numerable* el conjunto infinito cuyos elementos se pueden numerar (es decir, poner en concordancia con cada elemento un número entero de modo que a distintos elementos les correspondan números enteros diferentes). Un conjunto infinito cuyos elementos no se pueden llevar a la correspondencia biunívoca con los números enteros se llama *no numerable*.

probabilidades de los acontecimientos contradictorios es igual a la unidad:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{1.3.4}$$

En ciertos casos, la determinación directa de la probabilidad de un acontecimiento A resulta difícil, mientras que la probabilidad del acontecimiento contradictorio $\bar{A}$ se calcula sencillamente. En tales casos, la probabilidad del acontecimiento A se halla fácilmente con ayuda de la relación (1.3.4).

Ahora bien, examinemos más detalladamente la cuestión de calcular la probabilidad de un acontecimiento en el caso en que los posibles resultados de la prueba posean simetría, como, por ejemplo, en el caso de los lanzamientos de una moneda o un dado. Supongamos que con el experimento dado se puede enlazar un grupo completo de acontecimientos incompatibles $E_1, \ldots, E_n$ que, a consecuencia de la simetría, deben producirse con igual frecuencia al ser grande el número de pruebas (por ejemplo, la salida del escudo y de la cifra al arrojar una moneda o la salida del uno, el dos, el tres, el cuatro, el cinco y el seis al echar un dado). Esto quiere decir que las probabilidades de n acontecimientos $E_1, \ldots E_n$ son iguales unos a otros y, a causa de la igualdad (1.3.3), cada una de ellas equivale a $1/n$. Supongamos ahora que el acontecimiento que nos interesa se produce obligatoriamente, si sucede uno de los acontecimientos $E_1, \ldots, E_m$, y no puede producirse, si sucede cualquiera de los acontecimientos $E_{m+1}, \ldots, E_n$ o sea, $A = \sum_{i=1}^{m} E_i$. En este caso, basándose en el principio de adición de probabilidades, tendremos que

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i) = \frac{m}{n}. \tag{1.3.5}$$

Se llaman *casos* los acontecimientos incompatibles equiprobables que forman un grupo completo. Se dice que el caso E_i *favorece* al acontecimiento A si, una vez sucedido, este caso lleva a la producción obligatoria del acontecimiento A y *desfavorece* al acontecimiento A, si, una vez sucedido, este caso excluye la posibilidad de aparecer el acontecimiento A. La fórmula (1.3.5) muestra que si por razón de simetría de los resultados de la prueba con esta última se puede ligar un sistema de casos tal que unos de ellos favorecen al acontecimiento A y otros le desfavorecen, entonces la probabilidad del acontecimiento A es igual a la relación del número de casos favorables al acontecimiento A, al número total de los mismos.

Ejemplo 1.3.1. Al lanzar una moneda una sola vez, son posibles dos casos: la salida del escudo y la salida de la cifra. Uno de ellos favorece la aparición del escudo. Por lo tanto, la probabilidad de que salga el escudo es igual a 1/2.

Ejemplo 1.3.2. Si se arroja una sola vez un dado, hay seis casos diferentes: la salida de la cara del uno, el dos, el tres, el cuatro, el cinco y el seis. De ellos dos casos favorecen al acontecimiento A que consiste en la salida del número de puntos múltiplo de tres y tres casos favorecen a la aparición del acontecimiento B, o sea, a la salida de un número par de puntos. Por consiguiente, la probabilidad de que se obtenga un número de puntos múltiplo de tres es igual a $2/6=1/3$ y la probabilidad de obtener un número par de puntos equivale a $3/6=1/2$.

Ejemplo 1.3.3. En una urna hay 12 bolas iguales que no se distinguen en nada a tiento. De ellas 5 bolas son negras y 7 blancas. Hallar la posibilidad de que la bola extraída al azar de la urna sea blanca. En este caso, la prueba consiste en sacar una sola bola y contiene 12 casos, de ellos 7 favorecen la salida de una bola blanca. Por lo tanto, la probabilidad de que se extraiga una bola blanca equivale a 7/12.

El esquema de casos que da la posibilidad de calcular de un modo comparativamente sencillo las probabilidades de acontecimientos se encuentra en los problemas prácticos y sobre todo en la técnica, con poca frecuencia. Por eso, la fórmula (1.3.5) tiene una aplicación práctica muy limitada.

A la frecuencia condicional de un acontecimiento le corresponde la noción de la probabilidad condicional de un acontecimiento que significa la probabilidad de suceder un acontecimiento a condición de que se haya producido algún otro acontecimiento. Según la fórmula (1.2.8) deducida en el párrafo anterior, *la probabilidad condicional* de un acontecimiento A con respecto al acontecimiento B se determina como la relación de la probabilidad de que sucedan conjuntamente los acontecimientos A y B respecto a la del acontecimiento B:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.3.6}$$

De un modo semejante se determina la probabilidad del acontecimiento B con respecto a A.

La definición de la probabilidad condicional de un acontecimiento expresa al *principio de multiplicación de probabilidades* que dice: La probabilidad de la producción conjunta de dos acontecimientos es igual a la probabilidad de uno de ellos multiplicado por la probabilidad condicional del otro con respecto al primero:

$$P(AB) = P(A)\,P(B \mid A) = P(B)\,P(A \mid B). \tag{1.3.7}$$

Aplicando consecuentemente el principio de multiplicación de probabilidades, llegamos a la conclusión que para todo número de acontecimientos $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1) \ldots \\ \ldots P(A_n \mid A_1A_2 \ldots A_{n-1}), \tag{1.3.8}$$

con ello, el orden de numeración de estos acontecimientos no tiene importancia.

De acuerdo con las nociones intuitivas de la dependencia y la independencia de los acontecimientos, se dice que el acontecimiento A *depende* del acontecimiento B si $P(A \mid B) \neq P(A)$. El acontecimiento A *no depende* del B si $P(A \mid B) = P(A)$.

De la fórmula (1.3.7) se deduce que si el acontecimiento A no depende del B, entonces, tampoco el acontecimiento B depende del A. De este modo, es conveniente hablar solamente de la dependencia recíproca o la independencia recíproca de los acontecimientos. Dos acontecimientos son independientes solamente en el caso en que la producción de uno de ellos no cambia la probabilidad del otro.

Los acontecimientos $A_1, \ldots, A_n$ se denominan *independientes por parejas*, si cualesquiera dos de ellos son independientes. Los acontecimientos $A_1, \ldots, A_n$ se llaman *independientes*, si cualesquiera dos productos, compuestos de éstos, que no contienen sucesos comunes, son acontecimientos independientes.

Si los acontecimientos $A_1, \ldots, A_n$ son independientes, entonces, basándose en la definición dada, dos acontecimientos A_n y $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ son independientes y, por consiguiente, $P(A_n \mid A_1A_2 \ldots A_{n-1}) = P(A_n)$; luego, dos acontecimientos A_{n-1} y $A_1A_2 \ldots A_{n-2}$ son independientes, debido a lo cual $P(A_{n-1} \mid A_1A_2 \ldots A_{n-2}) = P(A_{n-1}), \ldots$; los acontecimientos A_1 y A_2 son independientes, a causa de lo cual $P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$. Por lo tanto, para los acontecimientos independientes $A_1, A_2, \ldots A_n$ la fórmula (1.3.8) toma la forma

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n). \qquad (1.3.9)$$

De este modo, la probabilidad de la aparición conjunta de dos acontecimientos independientes es igual al producto de las probabilidades de éstos.

Ejemplo 1.3.4. Una urna contiene 5 bolas negras y 7 bolas blancas. La prueba consiste en que de la urna se extrae una bola y se anota su color, después de lo cual la bola se mete de nuevo en la urna. Una vez mezcladas las bolas, de la urna vuelve a sacarse una bola. Hallar la probabilidad de que ambas veces sea extraída una bola blanca.

Llamemos acontecimiento A a la salida de una bola blanca la primera vez y acontecimiento B, a su salida la segunda vez. Es evidente, que tanto en la primera sacada como en la segunda hay 12 casos de los cuales 7 favorecen la salida de una bola blanca. Por consiguiente, en el caso dado $P(A) = P(B) = 7/12$, $P(B \mid A) = P(A \mid B) = 7/12$. Por eso, basándose en el principio de multiplicación de probabilidades

$$P(AB) = P(A)\,P(B \mid A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{144}.$$

La probabilidad de que se saque una bola blanca la segunda vez no depende absolutamente de la primera extracción. Por eso, en el caso en cuestión, los acontecimientos A y B son independientes.

Ejemplo 1.3.5. En las condiciones del ejemplo anterior, hallar la probabilidad de la salida de dos bolas blancas sin volver a meter en la urna la primera bola sacada. En este caso, al extraer la segunda bola, hay 11 casos de los

cuales 6 favorecen la salida de una bola blanca, a condición de que la primera bola sacada sea blanca (es decir, de que suceda el acontecimiento A). Por consiguiente, la probabilidad condicional de que aparezca una bola blanca por segunda vez, a condición de que la primera bola extraída ha sido blanca (es decir, la probabilidad condicional del acontecimiento B con respecto al A) es igual a 6/11. Aplicando el principio de multiplicación de probabilidades, hallamos la probabilidad de que ambas bolas sacadas sean blancas:

$$P(AB) = P(A)\,P(B \mid A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}.$$

Si la primera bola extraída resulta ser negra, la probabilidad de sacar una bola blanca en la segunda sacada (es decir, la probabilidad condicional del acontecimiento B con respecto al $\bar{A}$) es igual a 7/11. De este modo, la probabilidad de que salga una bola blanca la segunda vez aquí depende considerablemente de cuál ha sido la bola extraída la primera vez: $P(B \mid A) \neq P(B)$. Por lo tanto, los acontecimientos A y B son en este caso dependientes.

Las operaciones de adición y de multiplicación de acontecimientos poseen algunas propiedades características de la adición y la multiplicación de números. Por ejemplo, la suma y el producto de los acontecimientos A y B no dependen del orden en que se toman:

$$A + B = B + A, \quad AB = BA.$$

Las operaciones de adición y multiplicación de acontecimientos son asociativas:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C,$$
$$(AB)\,C = A\,(BC) = ABC.$$

Por fin, las operaciones de adición y multiplicación de acontecimientos son distributivas:

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

Todas estas propiedades se deducen directamente de las definiciones de la suma y del producto de acontecimientos. Así, por ejemplo $(A + B)\,C$ representa la producción del acontecimiento C a la vez con el acontecimiento A o con el acontecimiento B, es decir, indiferentemente de con cual de ellos precisamente. Evidentemente, el acontecimiento $AC + BC$ también consiste en producirse o C junto con A o C junto con B.

Sin embargo, no todas las leyes de adición y multiplicación de números son aplicables para la adición y la multiplicación de acontecimientos. Así, por ejemplo, el acontecimiento $A + A$ coincide, evidentemente, con el A. Lo mismo que la aparición conjunta de A con A coincide con A. Por consiguiente, $A + A = A$, $AA = A$ para cualquier acontecimiento A.

En muchos casos las operaciones con los acontecimientos ayudan a simplificar esencialmente el cálculo de probabilidades de los mismos. Por eso, será útil estudiar dichas operaciones un poco más detalladamente.

Sean A y B dos acontecimientos cualesquiera, $\overline{A}$ y $\overline{B}$, los acontecimientos contradictorios correspondientes. Es fácil ver que $\overline{A} + \overline{B}$ representa un acontecimiento contradictorio a la producción conjunta de A y B:

$$\overline{A} + \overline{B} = (\overline{AB}).$$

En efecto, $\overline{A} + \overline{B}$ es la producción de uno de los acontecimientos $\overline{A}$ y $\overline{B}$, como mínimo, lo que equivale a la no producción de AB. En general para cualesquiera acontecimientos $A_1, \ldots, A_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A}_i = \overline{(\prod_{i=1}^{n} A_i)}.$$

La producción conjunta de los acontecimientos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ (la no producción de los acontecimientos A y B) es, evidentemente, contradictoria a la aparición de por lo menos uno de los acontecimientos A y B:

$$\overline{A}\,\overline{B} = \overline{(A + B)}.$$

Y en general

$$\prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i = \overline{(\sum_{i=1}^{n} A_i)}.$$

Si con la prueba en cuestión está enlazado algún acontecimiento cierto E, entonces cualquier acontecimiento A no puede aparecer sino que junto con este acontecimiento cierto y, por lo tanto,

$$A = AE.$$

En particular, la suma $B + \overline{B}$ representa un acontecimiento cierto. Por eso

$$A = A\,(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}.$$

Esta fórmula ofrece la descomposición del acontecimiento A en dos acontecimientos incompatibles AB y $A\overline{B}$. Análogamente podemos escribir

$$B = AB + \overline{A}B.$$

Ejemplo 1.3.6. Hallemos la probabilidad de que suceda, por lo menos, uno de los acontecimientos A y B, es decir, la probabilidad del acontecimiento $A + B$, teniendo en cuenta que estos sucesos, en el caso general, pueden ser compatibles. Según las reglas expuestas de adición de acontecimientos,

$$A + B = AB + A\overline{B} + AB + \overline{A}B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B.$$

Esta fórmula ofrece la descomposición del acontecimiento $A + B$ en tres sucesos incompatibles AB, $A\overline{B}$ y $\overline{A}B$. Valiéndose de las descomposiciones obtenidas de los acontecimientos A, B y $A + B$ en los sucesos incompatibles, podemos

escribir, basándonos en el principio de adición de probabilidades

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}),$$
$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B),$$
$$P(A+B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B).$$

Sustituyendo las expresiones de las probabilidades $P(A\bar{B})$ y $P(\bar{A}B)$ de las primeras dos fórmulas en la tercera, se obtiene

$$P = (A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Pasemos ahora a deducir algunas fórmulas que son importantes para la aplicación.

En algunos casos, es difícil calcular directamente la probabilidad de un acontecimiento A que nos interesa, pero se puede calcular fácilmente las probabilidades condicionales del acontecimiento A con respecto a varios sucesos incompatibles $E_1, \ldots, E_n$ que forman un grupo completo. En este caso $\sum_{i=1}^{n} E_i$ representa un acontecimiento cierto y, por lo tanto,

$$P(A) = P(AE) = P\left(A \sum_{i=1}^{n} E_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AE_i\right).$$

Por eso, aplicando el principio de adición de probabilidades, se obtiene

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AE_i).$$

Aplicando ahora el principio de multiplicación de probabilidades, se tiene

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A \mid E_i). \qquad (1.3.10)$$

Esta fórmula se llama *fórmula de probabilidad total.*

Ejemplo 1.3.7. La probabilidad de que en la señal de radio recibida haya una señal útil es igual a p. La probabilidad de que no se revele la señal útil en el caso en que ésta se contenga en la señal recibida es igual a α y la probabilidad de considerar erróneamente revelada una señal útil en el caso en que se recibe solamente un ruido es igual a β. Hallar la probabilidad de que el problema de revelación de una señal útil se resuelva incorrectamente y la probabilidad de una resolución correcta. En el caso en cuestión el acontecimiento A es una resolución errónea, el acontecimiento E_1 representa la presencia de la señal útil en la señal de radio que se recibe y el acontecimiento E_2, la ausencia de la señal útil (es decir, la recepción de solo ruido). Según los datos, $P(E_1) = p$, $P(A \mid E_1) = \alpha$, $P(A \mid E_2) = \beta$. Además, puesto que los acontecimientos E_1 y E_2 son incompatibles y forman un grupo total (es decir, en este caso son contradictorios), $P(E_2) = 1 - p$. Por consiguiente, aplicando la fórmula de

probabilidad total (1.3.10), se obtiene

$$p_{err} = P(A) = P(E_1) P(A \mid E_1) + P(E_2) P(A \mid E_2) = p\alpha + (1-p)\beta.$$

La probabilidad de la resolución correcta, como probabilidad de un acontecimiento contradictorio, es igual a

$$p_{corr} = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p\alpha - (1-p)\beta.$$

La misma fórmula puede ser obtenida aplicando directamente la fórmula de probabilidad total.

Ejemplo 1.3.8. La probabilidad de llegar a una central telefónica k llamadas durante un intervalo de tiempo t es igual a $p_t(k)$. Los acontecimientos que consisten en llegar k llamadas en un intervalo de tiempo y l llamadas en otro intervalo de tiempo cualquiera que no va recubierto por el primero, son independientes, cualesquiera que sean k y l. Hallar la probabilidad $p_{2t}(n)$ de que durante el intervalo de tiempo $2t$ lleguen n llamadas.

Designemos por A la llegada de n llamadas durante el intervalo de tiempo $2t$. Supongamos que el acontecimiento E_k consiste en haber exactamente k llamadas en la primera mitad del intervalo de tiempo indicado, con ello, según los datos, $P(E_k) = p_t(k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Es evidente que para que se produzca el acontecimiento A a condición de que tenga lugar E_k, es necesario que en la segunda mitad del intervalo de tiempo $2t$ lleguen $n-k$ llamadas. Por lo tanto, $P(A \mid E_k) = p_t(n-k)$. Aplicando la fórmula de probabilidad total, hallamos

$$P(A) = p_{2t}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_t(k)\, p_t(n-k).$$

En las aplicaciones, para las mismas condiciones, surge con frecuencia otro problema: como resultado del experimento realizado se ha producido el acontecimiento A y basándose en este hecho, hay que emitir su parecer acerca de cuál de los acontecimientos incompatibles $E_1, \ldots, E_n$, que forman un grupo completo, tiene lugar. En el caso general, es imposible resolver esta cuestión con absoluta certeza. Por eso, prácticamente se puede solamente plantear el problema de revelar las probabilidades de los acontecimientos $E_1, \ldots, E_n$ conociendo que, como resultado de la prueba, ha sucedido el acontecimiento A. Es evidente que en el caso en cuestión las probabilidades buscadas no son más que las probabilidades condicionales de los acontecimientos $E_1, \ldots, E_n$ con respecto al acontecimiento A. Por eso, aplicando el principio de multiplicación de probabilidades, hallamos

$$P(A)\, P(E_k \mid A) = P(E_k)\, P(A \mid E_k),$$

de donde, teniendo en cuenta (1.3.10), obtenemos

$$P(E_k \mid A) = \frac{P(E_k)\, P(A \mid E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A \mid E_i)} \quad (k = 1, \ldots, n). \qquad (1.3.11)$$

Esta fórmula se llama fórmula de Bayes *). Las probabilidades incondicionales $P(E_k)$ se llaman probabilidades *a priori* y las

*) En los problemas de radiotécnica la fórmula (1.3.11) se llama a veces fórmula o principio de *probabilidad inversa*.

probabilidades condicionales $P(E_k \mid A)$, probabilidades *a posteriori* de los acontecimientos E_k $(k = 1, \ldots, n)$ *).

Ejemplo 1.3.9. Teniendo los mismos datos que en el ejemplo 1.3.7, supongamos que la señal de radio recibida ha sido tratada por un dispositivo radiorreceptor, y la señal tratada ha superado el nivel de umbral dado, debido a lo cual el sistema de detección ha decidido que la señal útil está presente. Hallar la probabilidad de que la señal útil efectivamente esté presente y la probabilidad de que ésta esté ausente.

En el caso en cuestión tenemos los mismos acontecimientos E_1 y E_2 que en el ejemplo 1.3.7. El acontecimiento A es el hecho de que la señal tratada por el sistema de detección haya superado el nivel de umbral. Según los datos del ejemplo, la probabilidad de decidir que la señal útil se tiene, en el caso de su presencia en la señal recibida (es decir, la probabilidad de la solución justa en este caso) es igual a $P(A \mid E_1) = 1 - \alpha$ y la probabilidad de decidir que la señal útil está presente en el caso de la recepción de sólo ruido equivale a $P(A \mid E_2) = \beta$. Por eso, aplicando la fórmula de Bayes (1.3.11), hallamos

$$P(E_1 \mid A) = \frac{p(1-\alpha)}{p(1-\alpha)+(1-p)\beta}.$$

$$P(E_2 \mid A) = \frac{(1-p)\beta}{p(1-\alpha)+(1-p)\beta}.$$

Valiéndose de la fórmula de Bayes, se puede determinar de un modo semejante la probabilidad de la presencia y de la ausencia de la señal útil en el caso en que el sistema de detección decide que dicha señal falta en la recibida.

§ 1.4. Repetición de los experimentos

Un experimento complejo consiste frecuentemente en que una prueba elemental, como resultado de la cual puede aparecer o no aparecer algún acontecimiento A, se realiza repetidas veces y nos interesan las probabilidades de diferentes resultados de este experimento complejo.

Llamaremos *independientes* a los experimentos, si la probabilidad de producirse un resultado cualquiera de cada uno de los experimentos no depende de los resultados de los otros. Esta definición concuerda perfectamente con la de la independencia de los acontecimientos expuesta en el párrafo precedente. En efecto, designando por A_i cualquier resultado posible del i-ésimo experimento, observamos que n experimentos son independientes cuando, y sólo cuando, son independientes los acontecimientos $A_1, \ldots, A_n$, es decir, cuando las probabilidades condicionales del acontecimiento A_i con respecto a todos los acontecimientos $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ y con respecto a todas las coincidencias posibles de estos sucesos son iguales a la probabilidad incondicional del acontecimiento A_i.

Convengamos en decir que los experimentos se realizan *en condiciones iguales*, si la probabilidad del acontecimiento que nos interesa A tiene en todas las pruebas el mismo valor p.

*) A priori— loc. lat. que significa «que viene antes», o sea antes de la prueba. A posteriori, «que viene después», o sea, después de la prueba.

Como resultado de n experimentos, el acontecimiento A puede no producirse ni una sola vez, producirse una, dos, ... n veces. Es necesario hallar las probabilidades de diferentes valores del número de aparición del acontecimiento A.

Designemos por $P_{m,\,n}$ la probabilidad de que en n experimentos independientes realizados en iguales condiciones el acontecimiento A se produce exactamente m veces ($m = 0, 1, \ldots, n$). Para resolver el problema planteado, tomemos n casillas y registraremos los resultados de cada prueba, anotando en la casilla correspondiente A, si el acontecimiento A se produce en este experimento y $\overline{A}$, en el caso contrario. Entonces nuestra tarea se reducirá a la determinación de la probabilidad de que algunas m casillas estén ocupadas por la letra A y las $n - m$ restantes, por la letra $\overline{A}$. Puesto que no nos importa cuáles casillas estarán ocupadas precisamente por la letra A, con tal de que el número de tales casillas sea igual a m, entonces, aplicando el principio de adición de probabilidades, llegamos a la conclusión de que la probabilidad buscada $P_{m,\,n}$ es igual a la suma de las probabilidades de todas las colocaciones posibles de m letras A y de $n - m$ letras $\overline{A}$ en n casillas. Del Algebra elemental se sabe que el número de procedimientos con cuya ayuda se puede seleccionar m elementos de n es igual al número de combinaciones de n elementos en series de m. Por consiguiente, la probabilidad de suceder el acontecimiento A exactamente m veces, al efectuar n experimentos, es igual a la suma C_n^m de sumandos cada uno de los cuales representa la probabilidad de obtener, como resultado de la prueba, una colocación determinada de m letras A y de $n - m$ letras $\overline{A}$ en n casillas. La probabilidad de cada colocación, basándose en el teorema de multiplicación de probabilidades, para los acontecimientos independientes es igual a $p^m q^{n-m}$, donde, por abreviar, se ha hecho $q = 1 - p$. Efectivamente, para que, por ejemplo, las primeras m casillas resulten estar ocupadas por la letra A y las últimas $n - m$, por la letra $\overline{A}$, es necesaria la coincidencia de los acontecimientos siguientes: producción de A en el primer experimento, producción de A en el segundo experimento etc., producción de A en el emésimo experimento; no producción de A en el $(m + 1)$-ésimo experimento, no producción de A en el $(m + 2)$-ésimo experimento etc., no producción de A en el enésimo experimento. Multiplicando las probabilidades de estos acontecimientos, obtendremos, por fin, $p^m q^{n-m}$. De este modo, la probabilidad buscada de que el acontecimiento A se produzca m veces, al realizar n experimentos, es igual a la suma C_n^m de sumandos iguales a $p^m q^{n-m}$, es decir,

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.4.1}$$

El segundo problema ligado con la repetición de las pruebas

consiste en hallar la probabilidad $R_{k,\,n}$ de que el acontecimiento A se produzca no menos de k veces, al realizar n experimentos. Sobre la base del principio de adición de probabilidades, esta probabilidad es igual a

$$R_{k,\,n} = \sum_{m=k}^{n} P_{m,\,n} = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1.4.2)$$

Es conveniente aplicar esta fórmula en el caso en que $k \geqslant (n+1)/2$. En el caso cuando $k < (n+1)/2$, es conveniente expresar la probabilidad, basándose en la fórmula (1.3.4), por medio de la probabilidad del acontecimiento contradictorio, es decir, por medio de la probabilidad de que el acontecimiento A se produzca menos de k veces. Entonces se obtiene

$$R_{k,\,n} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_{m,\,n} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1.4.3)$$

En particular, esta fórmula ofrece la siguiente expresión de la probabilidad de que aparezca por lo menos un acontecimiento A:

$$R_{1,\,n} = 1 - q^n. \qquad (1.4.4)$$

Esta fórmula puede ser también obtenida con facilidad directamente observando que la probabilidad de no producirse el acontecimiento A al realizar n experimentos es igual a q^n según el teorema de multiplicación de las probabilidades de acontecimientos independientes. La probabilidad de suceder el acontecimiento A una vez, por lo menos, como la probabilidad del acontecimiento contradictorio a la no producción de aquél, se determina restando q^n de la unidad.

Es evidente que la suma de todas las probabilidades $P_{m,\,n}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ es igual a la unidad, como suma de probabilidades de los acontecimientos incompatibles que forman un grupo completo. Esta tesis puede ser también demostrada observando que la suma de todas las expresiones (1.4.1), según la fórmula del binomio de Newton, es igual a $(p+q)^n = 1^n$.

Ejemplo 1.4.1. La moneda se arroja seis veces. Hallar la probabilidad de que el escudo salga dos veces por lo menos.

Designemos por A la salida del escudo al lanzar la moneda una sola vez. Entonces $P(A) = p = 0{,}5$ y $q = 1 - p = 0{,}5$. La probabilidad de un acontecimiento A no menos de dos veces al efectuar seis lanzamientos, se calcula por la fórmula (1.4.3)

$$R_{2,\,6} = 1 - C_6^0 p^0 q^6 - C_6^1 p q^5 = \frac{57}{64}.$$

Ejemplo 1.4.2. La probabilidad del fallo de un sistema automático durante cierto intervalo de tiempo es igual a 0,1. Hallar la probabilidad del fallo de tres sistemas exactamente de los diez que se encuentran en explotación. Hallar la probabilidad de que uno de los diez sistemas, por lo menos, funcione bien.

Sea el acontecimiento A el fallo de un sistema examinado por separado. Según los datos $P(A) = p = 0{,}1$, $q = 1 - p = 0{,}9$. La probabilidad del fallo de $m = 3$ sistemas de $n = 10$ en explotación, de acuerdo con la fórmula (1.4.2) es igual a

$$P_{3,\,10} = C_{10}^{3} p^3 q^7 = \frac{10!}{3!\,7!} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^7 \approx 0{,}057.$$

Ahora hallemos la probabilidad de que, por lo menos, uno de los diez sistemas funciona bien. Por la fórmula (1.4.4) es fácil hallar (considerando como acontecimiento A el funcionamiento sin fallos del sistema)

$$R_{1,\,10} = 1 - 0{,}1^{10} = 0{,}9999999999.$$

Ejemplo 1.4.3. La probabilidad del fallo de un elemento determinado del sistema es igual a $p = 0{,}05$. Para aumentar la fiabilidad del sistema, en éste, en vez de uno, se han introducido $n = 5$ elementos semejantes que funcionan simultáneamente. Con ello, el sistema se estropea sólo en el caso en que fallen todos los cinco elementos. Hallar la probabilidad P de que el sistema funcione sin fallos.

La probabilidad de que fallen todos los cinco elementos es igual a $p^5 = 3{,}125 \cdot 10^{-7}$. Por consiguiente, la probabilidad de que el sistema funcione sin fallos será $P = 1 - 3{,}125 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}9999997$.

CAPITULO 2

Magnitudes aleatorias

§ 2.1. Función de distribución y densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria

En el § 1.2 vimos que de característica experimental de una magnitud aleatoria puede servir su función estadística de distribución. Conociendo la función estadística de distribución de una magnitud aleatoria X, se pueden hallar las frecuencias con que sus valores se encuentran en diferentes intervalos del eje numérico. De modo análogo, en calidad de característica teórica de una magnitud aleatoria X, no relacionada con la realización de experimentos cualesquiera, se puede tomar la probabilidad de cumplirse la desigualdad $X < x$ considerada como función de la variable x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{2.1.1}$$

Esta función se llama función de distribución de la magnitud aleatoria X.

Ejemplo 2.1.1. Hallar la función de distribución del número de veces que se produce un acontecimiento A al realizar n experimentos independientes en las mismas condiciones.

Es evidente que el número de veces X que sucede el acontecimiento A al realizar n pruebas es una magnitud aleatoria, que, como resultado de un experimento complejo consistente en n pruebas elementales, toma uno de los valores posibles $0, 1, 2, \ldots, n$. La probabilidad de que esta magnitud aleatoria tome el valor m en el caso en cuestión se expresa por la fórmula (1.4.1) deducida en el párrafo anterior. Supongamos ahora que x es una variable que varía en los límites $(-\infty, \infty)$. Para todos los valores negativos de x y siendo $x = 0$, la probabilidad de que el número de veces que sucede el acontecimiento A sea menor que x es, evidentemente, igual a cero. Si $0 < x \leqslant 1$, la probabilidad de que el número de veces que ocurre el acontecimiento A sea menor que x representa la probabilidad de que el acontecimiento A no suceda ni una sola vez, es decir, es igual a $P_{0,n}$. Y en general, si $k < x \leqslant k+1$, la probabilidad de que el número de veces que se produce el acontecimiento A sea menor que x no es más que la probabilidad de que el acontecimiento A o no ocurra ni una sola vez, o aparezca una sola vez, etc., o suceda k veces, es decir, equivale a $\sum_{m=0}^{k} P_{m,n}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Y, por fin, si $x > n$, la desigualdad $X < x$ representa un acontecimiento cierto y su probabilidad es igual a la unidad. De este modo, la función de distribución del número de veces que ocurre el acontecimiento al realizar n pruebas independientes, en las mismas condiciones,

se determina por la fórmula

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \sum\limits_{m=0}^{k} C_n^m p^m q^{n-m} & \text{si } k < x \leqslant k+1 \\ & (k=0, 1, \ldots, n-1), \\ 1 & \text{si } x > n. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

En la fig. 2.1.1 se muestra el gráfico de esta función de distribución para el caso en que $n = 5$, $p = 0{,}95$.

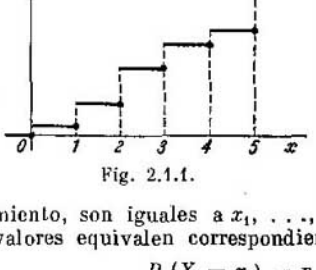


Fig. 2.1.1.

En el ejemplo examinado los valores posibles de la magnitud aleatoria forman un conjunto discreto y precisamente es el conjunto de todos los números enteros desde 0 hasta n. La magnitud aleatoria cuyo conjunto de valores posibles es *discreto* se denomina *discontinua o discreta*. La función de distribución de una magnitud aleatoria discreta se determina por completo por sus valores posibles y las probabilidades de estos valores. En efecto, si X es una magnitud aleatoria discreta cuyos valores posibles, numerados en orden de crecimiento, son iguales a $x_1, \ldots, x_n$, y las probabilidades de estos valores equivalen correspondientemente a:

$$P(X = x_i) = p_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.1.3}$$

entonces, la función de distribución de la magnitud aleatoria X se determina por la fórmula

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \tag{2.1.4}$$

donde la desigualdad bajo el signo de suma indica que la adición se efectúa tomando todos los valores del índice i para los cuales se cumple esta desigualdad. Con otras palabras, cualquiera que sea el valor de x, la función de distribución es igual a la suma de probabilidades de todos los valores x_i de la magnitud aleatoria X menores que x. Es evidente que si x, al crecer, se hace igual a x_{i+1}, entonces el número de los valores de x_i menores que x queda invariable, es decir, la función de distribución $F(x)$ tiene en el punto $x = x_{i+1}$ el mismo valor que para toda x en el intervalo $x_i < x < x_{i+1}$. Si x alcanza un valor mayor de x_{i+1}, entonces la función de distribución aumenta a salto en la magnitud p_{i+1}. Por consiguiente, el valor de la función de distribución en el punto de discontinuidad es igual a su valor a la izquierda de este punto, o sea, la función de distribución es continua a la izquierda. En la fig. 2.1.1. los valores de

la función de distribución en los puntos de discontinuidad están indicados por puntos gruesos.

Examinemos ahora las propiedades generales de la función de distribución de una magnitud aleatoria cualquiera. Igual que toda probabilidad, la función de distribución no puede ser negativa ni ser mayor que la unidad:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1. \tag{2.1.5}$$

Luego, cualesquiera que sean α y β, $\alpha < \beta$, para cumplir la desigualdad $X < \beta$ es necesario y suficiente que sea $X < \alpha$ o $\alpha \leqslant X < \beta$. Como los acontecimientos $X < \alpha$ y $\alpha \leqslant X < \beta$ son incompatibles, entonces, según el principio de adición de probabilidades,

$$P(X < \beta) = P(X < \alpha) + P(\alpha \leqslant X < \beta).$$

De aquí, basándose en la definición (2.1.1) de la función de distribución, sigue la igualdad

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{2.1.6}$$

De este modo, la probabilidad de que el valor de la magnitud aleatoria se encuentre en el segmento (α, β) del eje numérico, o en su extremo izquierdo, es igual al incremento de la función de distribución en este segmento.

Puesto que la probabilidad no puede ser negativa, entonces cualesquiera que sean α y β, $\alpha < \beta$, la magnitud $F(\alpha)$ no puede ser mayor que $F(\beta)$. Con otras palabras, la función de distribución es una función no decreciente.

Tomemos ahora una sucesión indefinidamente creciente de los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ de la variable x, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Los valores respectivos de la función de distribución $F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_n), \ldots$ forman una sucesión no decreciente de números cuyo límite superior es la unidad. Del Análisis Matemático se sabe que tal sucesión siempre tiene límite. Por otro lado, si todos los valores posibles de la magnitud aleatoria X son finitos, entonces, siendo x_n lo suficiente grande, la probabilidad de la desigualdad $X < x_n$ será lo próxima que se quiera a la unidad. Por lo tanto, el límite de la magnitud $F(x_n)$, para $x_n \to \infty$, no puede ser distinto de la unidad. De este modo, hemos demostrado que

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \tag{2.1.7}$$

De modo análogo se demuestra que

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0. \tag{2.1.8}$$

Si $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ es una sucesión creciente arbitraria de los valores de la variable x que converge a algún valor de x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

entonces todo valor posible de la magnitud aleatoria X, menor que x_0, pertenece a uno de los intervalos $x_n \leqslant x < x_{n+1}$. Por consiguiente, el acontecimiento $X < x_0$ no es más que la suma de un conjunto numerable de acontecimientos incompatibles $X < x_1$, $x_1 \leqslant X < x_2$, ..., $x_k \leqslant X < x_{k+1}$ ... Según el principio de adición de probabilidades

$$P(X < x_0) = P(X < x_1) + \sum_{k=1}^{\infty} P(x_k \leqslant X < x_{k+1}) \text{ o bien}$$

$$F(x_0) = F(x_1) + \sum_{k=1}^{\infty} [F(x_{k+1}) - F(x_k)].$$

De este modo, la serie del miembro derecho de la igualdad obtenida converge y su suma es igual a $F(x_0)$. Pero la suma de los n primeros términos de esta serie es igual a $F(x_n)$:

$$F(x_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)] =$$
$$= F(x_1) + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] = F(x_n).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x_0)$$

y si la magnitud $x_0 - x_n$ es lo suficiente pequeña, la diferencia $F(x_0) - F(x_n)$ será tan pequeña como se quiera.

De este modo, la función de distribución es continua a la izquierda y su valor en todo punto es igual al límite de su valor a la izquierda de este punto.

Pasemos ahora al límite en la igualdad (2.1.6) cuando $\beta \to \alpha$. En este caso, el intervalo (α, β) converge al punto α y obtendremos

$$P(X = \alpha) = F(\alpha + 0) - F(\alpha), \qquad (2.1.9)$$

donde $F(\alpha + 0)$ es, como siempre, $\lim_{\varepsilon \to 0} F(\alpha + |\varepsilon|)$. De este modo, la probabilidad de que la magnitud aleatoria X tome el valor α es igual al salto de su función de distribución en el punto α. Si la función de distribución es continua en el punto α, la probabilidad de que la magnitud aleatoria tome el valor α es igual a cero. Estas tesis se ilustran claramente en el ejemplo 2.1.1 examinado más arriba.

Si la función de distribución de una magnitud aleatoria X es continua para todos los valores de x, entonces la probabilidad de cualquiera de sus valores posibles es igual a cero. A primera vista esta deducción es contradictoria: como resultado de una prueba la magnitud aleatoria toma obligatoriamente cierto valor y al mismo tiempo la probabilidad de que ésta tome cualquier valor asignado de antemano es igual a cero. En realidad, aquí no hay ninguna con-

tradicción. En el § 1.3 ya señalamos que un acontecimiento posible puede tener la probabilidad igual a cero. En el caso en cuestión, si α es un valor posible de la magnitud aleatoria X y su función de distribución es continua en todo el eje numérico, la igualdad $X = \alpha$ es un acontecimiento posible cuya probabilidad es igual a cero. Esto solamente quiere decir que al ser muy grande el número de experimentos, será muy raro que la magnitud aleatoria X tome el valor dado α, así que la frecuencia de este valor tendrá la tendencia de aproximarse a cero.

Dado que la probabilidad de la igualdad $X = \alpha$, en el caso de una función continua de distribución, es igual a cero, entonces la fórmula (2.1.6) puede ser escrita en la forma

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{2.1.10}$$

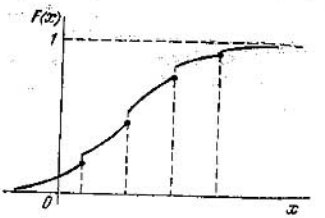


Fig. 2.1.2.

A base de las propiedades estudiadas de la función de distribución, se puede tener una idea del carácter general de la curva que la refleja. Una vista aproximada de tal curva se muestra en la fig. 2.1.2.

A causa de que, al ser continua la función de distribución, la probabilidad de cada valor de una magnitud aleatoria, tomado por separado, es igual a cero, dicha magnitud no puede ser caracterizada, en este caso, por las probabilidades de sus valores. Por eso, surge la pregunta: ¿Cómo se determina si es o no el número dado x un valor posible de la magnitud aleatoria, y se puede o no revelar cuáles de sus valores son más probables y cuáles menos probables? Se puede contestar a esta pregunta sustituyendo los puntos del eje numérico por intervalos pequeños correspondientes. Supongamos que Δx es un intervalo infinitesimal. Entonces la probabilidad de que la magnitud aleatoria X tome un valor comprendido entre x y $x + \Delta x$ puede servir de medida práctica de la posibilidad del valor dado de x. En este caso es conveniente dividir esta probabilidad por Δx. Ahora bien, llegamos a la noción de la densidad de probabilidad. Se llama densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria X al límite de la relación de la probabilidad de la desigualdad $x \leqslant X < x + \Delta x$ a la magnitud Δx cuando $\Delta x \to 0$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \tag{2.1.11}$$

Si la densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria X en el punto x es distinta de cero, entonces x es un valor posible de dicha magnitud. Si la densidad de probabilidad en el punto x_1 es mayor

que en el punto x_2, se puede decir que el valor x_1 de la magnitud aleatoria X es más probable que el valor x_2.

Expresando la probabilidad en (2.1.11) por la fórmula (2.1.6), obtendremos

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \qquad (2.1.12)$$

De este modo, la densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria es igual a la derivada de su función de distribución.

De la definición (2.1.11) se deduce directamente la primera propiedad fundamental de la densidad de probabilidad: la densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria es una función no negativa

$$f(x) \geqslant 0. \qquad (2.1.13)$$

Integrando la fórmula (2.1.12) y teniendo en cuenta (2.1.8), obtendremos la expresión de la función de distribución de una magnitud aleatoria en función de su densidad de probabilidad:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx. \qquad (2.1.14)$$

Suponiendo que aquí $x \to \infty$ y teniendo en consideración (2.1.7), obtendremos la segunda propiedad fundamental de la densidad de probabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1. \qquad (2.1.15)$$

De las fórmulas (2.1.10) y (2.1.12) se deduce que la probabilidad de que la magnitud aleatoria X tome el valor comprendido entre α y β es igual a la integral de su densidad de probabilidad tomada en los límites de α a β:

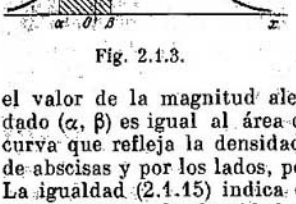


Fig. 2.1.3.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx. \qquad (2.1.16)$$

El sentido geométrico de esta fórmula es evidente. La probabilidad de que el valor de la magnitud aleatoria X se encuentre en el segmento dado (α, β) es igual al área de la figura limitada por arriba por la curva que refleja la densidad de probabilidad, por abajo por el eje de abscisas y por los lados, por las rectas $x = \alpha$ y $x = \beta$ (fig. 2.1.3). La igualdad (2.1.15) indica que toda el área limitada por la curva que representa la densidad de probabilidad y por eje de abscisas es igual a la unidad.

La magnitud $f(x)\,dx$ representa, con una exactitud de hasta infinitesimales de orden superior, la probabilidad de que la magnitud aleatoria X tome el valor en el intervalo $(x, x+dx)$. De acuerdo con la terminología adoptada en el análisis esta magnitud se llama *elemento de probabilidad*.

La función de distribución de una magnitud aleatoria, o su densidad de probabilidad, o el conjunto de valores posibles de una magnitud aleatoria discreta y las probabilidades de los mismos son diferentes formas de expresión de la ley de distribución de dicha magnitud. *La ley de distribución, o sea la distribución de probabilidades* de

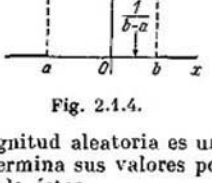


Fig. 2.1.4.

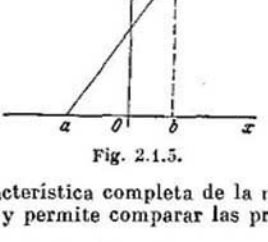


Fig. 2.1.5.

una magnitud aleatoria es una característica completa de la misma, que determina sus valores posibles y permite comparar las probabilidades de éstos.

Una de las más difundidas leyes de distribución de magnitudes aleatorias es la ley *normal* de distribución (Ley de Gauss) para la cual la densidad de probabilidad se determina por la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.1.17)$$

Esta ley de distribución será examinada en el § 2.5. Allí mismo, en la fig. 2.5.1, se da el gráfico de la densidad normal de probabilidad (2.1.17).

La distribución de probabilidades para la cual la densidad de probabilidad es constante en el intervalo (a, b) y es igual a cero fuera de este intervalo se llama *uniforme*. La densidad analítica de probabilidad de una magnitud aleatoria uniformemente distribuida se expresa por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b, \\ 0 & \text{si } x < a \text{ y si } x > b. \end{cases} \qquad (2.1.18)$$

El gráfico de esta densidad se muestra en la fig. 2.1.4. Los valores de la densidad de probabilidad en los puntos de discontinuidad pueden ser tomados arbitrariamente, puesto que no influyen en las

integrales de la forma (2.1.16). Aplicando la fórmula (2.1.14), hallamos con facilidad la función de distribución de una magnitud aleatoria X uniformemente distribuida:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a<x<b, \\ 1 & \text{si } x>b. \end{cases} \qquad (2.1.19)$$

En la fig. 2.1.5 se da el gráfico de esta función de distribución.

La distribución de probabilidades para la cual la densidad de probabilidad se determina por la fórmula

$$f(x)=\begin{cases} 2h^2xe^{-h^2x^2} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x<0, \end{cases} \qquad (2.1.20)$$

se llama de *Rayleigh*. El gráfico de la densidad de probabilidad para la ley de Rayleigh se presenta en la fig. 2.1.6.

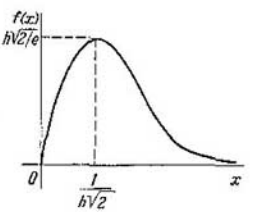


Fig. 2.1.6.

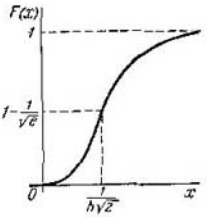


Fig. 2.1.7.

Sustituyendo la expresión de la densidad de probabilidad en la fórmula (2.1.14), hallamos la función de distribución de una magnitud aleatoria X repartida según la ley de Rayleigh

$$F(x)=2h^2\int_0^x xe^{-h^2x^2}\,dx=1-e^{-h^2x^2} \quad \text{si } x>0. \qquad (2.1.21)$$

Si $x<0$, esta función de distribución es igual a cero. El gráfico de la función de distribución para la ley de Rayleigh se muestra en la fig. 2.1.7.

La ley de distribución a la cual corresponden la densidad de probabilidad y la función de distribución

$$f(x)=ke^{-kx},\ F(x)=1-e^{-kx} \text{ si } x>0, \qquad (2.1.22)$$

se denomina *exponencial*.

Una generalización evidente de las leyes de distribución exponencial y de Rayleigh es la ley de distribución para la cual la función de distribución y la densidad de distribución se determinan por las fórmulas

$$F(x) = 1 - e^{-hx^n}, \quad f(x) = nhx^{n-1}e^{-hx^n} \text{ si } x > 0. \quad (2.1.23)$$

Esta ley de distribución fue aplicada por primera vez a los problemas de la práctica por Weibull. En el caso particular, cuando $n = 1$, la ley de Weibull se transforma en exponencial. Cuando $n = 2$, la ley de Weibull no es más que la de distribución de Rayleigh.

Ejemplo 2.1.2. En la teoría de fiabilidad de los dispositivos automáticos, la fiabilidad de un elemento o de un sistema se caracteriza por la llamada *intensidad media de fallos* $\lambda(t)$, la cual representa una función de tiempo tal, que siendo multiplicada por dt, ofrece (con exactitud de infinitesimales de orden superior) la probabilidad condicional del fallo del elemento en el intervalo de tiempo $(t, t + dt)$, suponiendo que hasta el momento t el elemento funcionaba normalmente. Conociendo la función $\lambda(t)$, se puede hallar la ley de distribución de la duración de servicio.

Para hallar la ley de distribución de la duración de servicio del elemento T, examinemos dos acontecimientos: A (buen funcionamiento del elemento hasta el momento t) y B (fallo del elemento en el intervalo de tiempo $(t, t + dt)$). Es evidente que el acontecimiento B no puede suceder sino junto con el acontecimiento A, porque el elemento puede fallar en el intervalo de tiempo $(t, t + dt)$ solamente en el caso de funcionar bien hasta el momento t. Por eso $P(B) = P(AB)$, y basándonos en el principio de multiplicación de probabilidades, podemos escribir

$$P(B) = P(A)\,P(B \mid A). \quad (2.1.24)$$

Designemos las funciones incógnitas de distribución y la densidad de probabilidad de la duración de servicio del elemento T por $F(t)$ y $f(t)$ respectivamente. La probabilidad del acontecimiento B es igual, con exactitud hasta infinitesimales de segundo orden, al elemento de probabilidad correspondiente:

$$P(B) = P(t \leqslant T < t + dt) = f(t)\,dt = F(t)\,dt.$$

La probabilidad del acontecimiento A se expresa por medio de la función de distribución de la duración de servicio del elemento T:

$$P(A) = P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - F(t).$$

Por fin, la probabilidad condicional $P(B \mid A)$ se expresa por la intensidad media de fallos del elemento $\lambda(t)$:

$$P(B \mid A) = \lambda(t)\,dt.$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la fórmula (2.1.24), obtendremos, después de dividir ambos miembros por dt, la ecuación diferencial para la función de distribución $F(t)$:

$$F'(t) = [1 - F(t)]\,\lambda(t). \quad (2.1.25)$$

Dado que la duración de servicio del elemento no puede ser negativa, el acontecimiento $T < 0$ es imposible y, por lo tanto, $F(0) = 0$.

Integrando la ecuación diferencial (2.1.25), con la condición inicial de que $F(0) = 0$, hallamos la función de distribución de la duración de servicio del

elemento:

$$F(t)=1-\exp\left\{-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right\}. \tag{2.1.26}$$

De aquí, por derivación, hallamos la densidad de probabilidad de la duración de servicio del elemento:

$$f(t)=\lambda(t)\exp\left\{-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right\}. \tag{2.1.27}$$

En el caso particular, de que la intensidad de fallos $\lambda(t)=\lambda$ sea constante las fórmulas (2.1.26) y (2.1.27), toman la forma

$$F(t)=1-e^{\lambda t}, \quad f(t)=\lambda e^{-\lambda t}. \tag{2.1.28}$$

De este modo, siendo constante la intensidad de fallos λ, la duración de servicio de un elemento está subordinada a la ley exponencial de distribución, lo que explica el gran papel que dicha ley desempeña en la teoría de fiabilidad de los sistemas automáticos.

Ejemplo 2.1.3. Para los mismos datos del ejemplo anterior, hallar la probabilidad condicional de que el elemento falle en el intervalo de tiempo (t_1, t_2) suponiendo que funcione bien hasta el momento t_1.

Examinemos dos acontecimientos: A (el funcionamiento normal del elemento hasta el momento t_1), y B (el fallo del elemento en el intervalo de tiempo (t_1, t_2)). Valiéndonos de la fórmula (2.1.10) obtendremos

$$P(B)=P(t_1<T<t_2)=F(t_2)-F(t_1) \tag{2.1.29}$$

$$P(A)=P(T\geqslant t_1)=1-P(T<t_1)=1-F(t_1). \tag{2.1.30}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (2.1.24) y tomando en cuenta que en el caso dado el acontecimiento B no puede producirse sino junto con el acontecimiento A, hallaremos la probabilidad buscada de que falle el elemento en el intervalo de tiempo (t_1, t_2) a condición de que hasta el momento t_1 haya funcionado bien:

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{F(t_2)-F(t_1)}{1-F(t_1)}. \tag{2.1.31}$$

Sustituyendo aquí la expresión (2.1.26) para la función de distribución $F(t)$ obtendremos definitivamente

$$P(B\mid A)=1-\exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)\,dt\right\}. \tag{2.1.32}$$

En el caso particular, en que la intensidad de fallos λ es constante, la sustitución de la expresión de la función de distribución de (2.1.28) en la fórmula (2.1.29) ofrece la siguiente fórmula para la probabilidad de que falle el elemento en el intervalo de tiempo (t_1, t_2):

$$P(B)=e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2}. \tag{2.1.33}$$

La sustitución de la expresión (2.1.28) para la función de distribución en (2.1.31) ofrece la siguiente fórmula para la probabilidad condicional de que falle el elemento en el intervalo de tiempo (t_1, t_2) a condición de que hasta el momento t_1 haya funcionado bien:

$$P(B\mid A)=1-e^{-\lambda(t_2-t_1)}. \tag{2.1.34}$$

§ 2.2. Aplicación de las funciones impulsivas y generalización de la noción de la densidad de probabilidad

La fórmula (2.1.12) muestra que, según la definición común de la derivada, la densidad de probabilidad existe solamente en las magnitudes aleatorias cuyas funciones de distribución son continuas y tienen las primeras derivadas continuas por intervalos en todo el eje numérico. Tales magnitudes aleatorias se denominan *continuas*. Desde este punto de vista, por ejemplo, las magnitudes aleatorias discontinuas (discretas) no poseen densidad de probabilidad. Sin embargo, desde el punto de vista práctico conviene ampliar el concepto de densidad de probabilidad de tal modo que éste

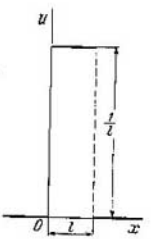


Fig. 2.2.1.

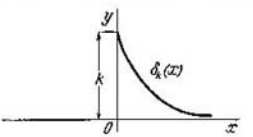


Fig. 2.2.2.

pueda ser extendido a cualesquiera magnitudes aleatorias que se encuentren en los problemas prácticos. Para aclarar el modo de hacerlo, observemos que desde el punto de vista práctico se puede considerar que la función de distribución de una magnitud aleatoria discontinua (de cuyo ejemplo puede servir la curva escalonada de la fig. 2.1.1) tiene la derivada igual a cero por doquier, a excepción de los puntos $x_1, \ldots, x_n$, e igual al infinito en los puntos $x_1, \ldots, x_n$. No obstante, en virtud de las fórmulas (2.1.9) y (2.1.16) la integral de esta derivada en un intervalo, todo lo pequeño que se quiera, que contiene el punto x_k (y que no contiene otros puntos x_i) debe equivaler a p_k. La función que posee tales propiedades se puede construir sirviéndose de la noción sobre la función delta impulsiva, introducida por primera vez por el famoso físico inglés Dirac.

Se llama *función delta impulsiva* de Dirac a la función que es igual a cero por doquier, salvo el origen de coordenadas donde ésta toma un valor infinito de modo que su integral, en cualquier intervalo que contiene el origen de coordenadas, es igual a la unidad:

$$\left.\begin{aligned} &\delta(x) = 0 \quad \text{si } x \neq 0, \\ &\delta(0) = \infty, \\ &\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\,dx = 1 \text{ para cualquier } \varepsilon > 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.1}$$

Para que, teniendo en cuenta la definición adoptada (2.1.1) de la función de distribución, se pueda usar la función delta en lo que toca a la derivación de las funciones de distribución discontinuas, es necesario subordinarla a una condición complementaria.

$$\int_{-\varepsilon}^{0} \delta(x)\,dx = 0, \qquad \int_{0}^{\varepsilon} \delta(x)\,dx = 1 \text{ para cualquier } \varepsilon > 0. \quad (2.2.2.)$$

La función que posee tales propiedades puede ser obtenida, por ejemplo, como límite de un impulso rectangular positivo del área unitaria cuando la duración de este impulso tiende a cero (2.2.1). Es todavía más cómodo definir la función delta como límite de la densidad exponencial de probabilidad si $k \to \infty$ [véanse las fórmulas (2.1.22)] (fig. 2.2.2):

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ ke^{-kx} \text{ si } x \geqslant 0. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Es evidente que para cualquiera $x > 0$ esta función tiende a cero cuando $k \to \infty$ *. Si $x < 0$, ésta es igual a cero. Si $x = 0$, dicha función crece ilimitadamente cuando $k \to \infty$. Por fin, para cualquier > 0

$$\int_{0}^{\varepsilon} \delta_k(x)\,dx = k\int_{0}^{\varepsilon} e^{-kx}\,dx = 1 - e^{-k\varepsilon}.$$

Cuando $k \to \infty$ esta expresión tiende a la unidad. De este modo, la función obtenida en el límite para $k \to \infty$ satisface también las condiciones (2.2.2)

La propiedad fundamental de la función delta viene expresada por la fórmula

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi)\,\delta(\xi-x)\,d\xi = \varphi(x), \quad (2.2.4)$$

que es válida para toda función continua $\varphi(x)$. Para convencernos de esto, examinemos la integral

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi)\,\delta_l(x-\xi)\,d\xi = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x-t)\,\delta_l(t)\,dt,$$

donde por $\delta_l(t)$ se designa el impulso unitario rectangular mostrado gráficamente en la fig. 2.1.1. Es evidente que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede tomar $l < \varepsilon$. Entonces obtendremos

*) En efecto, abriendo la indeterminación según la regla de L'Hópital, obtendremos

$$\lim_{k\to\infty} ke^{-kx} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{e^{kx}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{xe^{kx}} = 0.$$

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi)\,\delta_l(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x-t)\,dt$$

o bien, aplicando el teorema de la media

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi)\,\delta_l(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{l}\,\varphi(x-\theta)\int_0^l dt = \varphi(x-\theta).$$

donde θ es cierto valor medio de t en el intervalo $(0,\ l)$: $0 < \theta < l$. Al pasar al límite, cuando $l \to 0$, la magnitud θ tiende a cero y obtendremos

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi = \varphi(x), \qquad (2.2.5)$$

lo que demuestra precisamente el primer miembro de la fórmula (2.2.4). De modo análogo se demuestra su segundo miembro.

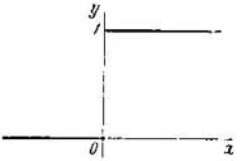


Fig. 2.2.3.

Puesto que la función subintegral en (2.2.4) es igual a cero para todos los valores de ξ, excepto $\xi = x$, los límites de integración se pueden ampliar arbitrariamente. Como resultado, para todo intervalo $(a,\ b)$ que contiene el punto x, $a < x < b$, obtendremos

$$\int_a^b \varphi(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi = \int_a^b \varphi(\xi)\,\delta(\xi-x)\,d\xi = \varphi(x). \qquad (2.2.6)$$

Observemos ahora que la función delta puede ser considerada como derivada de la función unidad escalonada $1(x)$ que se determina por las igualdades

$$1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0, \\ 1 \text{ si } x > 0. \end{cases} \qquad (2.2.7)$$

En la fig. 2.2.3 aparece el gráfico de la función unidad escalonada.

Usando la función delta impulsiva, se puede determinar la densidad de probabilidad para cualesquiera magnitudes aleatorias, en particular, para las discontinuas. Es fácil comprender que la densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria discontinua X con los posibles valores $x_1, \ldots, x_n$, cuyas probabilidades equivalen respectivamente a $p_1 \ldots, p_n$, se expresa por la fórmula

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x-x_i). \qquad (2.2.8)$$

En efecto, esta función es igual a cero por doquier, salvo los puntos $x_1, \ldots, x_n$, es infinita en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ y su integral en el intervalo, todo lo pequeño que se quiera, que contiene un solo

valor posible x_k, es igual a p_x:

$$\int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\,dx = p_k \int_{x_k+\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} \delta(x-x_k)\,dx = p_k \quad (k=1, \ldots, n) \quad (2.2.9)$$

Si la función de distribución tiene saltos iguales a $p_1, \ldots, p_n$ en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente, y entre estos puntos es continua, entonces, restando de ella la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} p_i 1(x-x_i),$$

obtendremos una función continua. Por eso, la función de distribución de toda magnitud aleatoria X, que se puede encontrar en los problemas de la práctica, puede ser representada en la forma

$$F(x) = F_1(x) + \sum_{i=1}^{n} p_i 1(x-x_i), \quad (2.2.10)$$

donde $F_1(x)$ es una función continua y $p_1, \ldots, p_n$, los saltos de $F(x)$ en los puntos $x_1, \ldots, x_n$. Con ello, la función $F_1(x)$ prácticamente siempre resulta ser diferenciable por intervalos. Por eso, derivando la fórmula (2.2.10) y teniendo en cuenta que la derivada de la función unidad escalonada es una función delta, obtendremos la siguiente expresión de la densidad de la probabilidad de cualquier magnitud aleatoria X:

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x-x_i), \quad (2.2.11)$$

donde $f_1(x)$ es una función cuya integral en cualquier intervalo infinitesimal es una magnitud infinitamente pequeña.

La magnitud aleatoria cuya densidad de la probabilidad representa la suma de una función corriente y de la combinación lineal de funciones delta pertenece a las magnitudes aleatorias de *tipo mixto*. Los valores posibles de una magnitud aleatoria de tipo mixto forman un conjunto continuo o varios conjuntos continuos sin elementos comunes. Sin embargo, a diferencia de las magnitudes aleatorias continuas, una magnitud aleatoria de tipo mixto siempre tiene un conjunto discreto de posibles valores exclusivos cada uno de los cuales tiene una probabilidad diferente de cero.

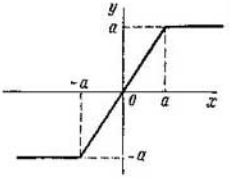


Fig. 2.2.4.

Ejemplo 2.2.1. La señal de entrada de un elemento no lineal con una zona limitada de linealidad (fig. 2.2.4) representa una magnitud aleatoria X distribuida uniformemente en el intervalo $-2{,}5a < x < 1{,}5a$. La señal de salida

del elemento está limitada, en valor absoluto, por el número a y es igual a la señal de entrada cuando esta última tiene el valor en los límites de $(-a, a)$. Hallar la ley de distribución de la señal de salida Y de dicho elemento no lineal.

Según la definición, la función de distribución de la magnitud aleatoria Y representa la probabilidad de cumplirse la desigualdad $Y < y$, probabilidad que se considera como función de y. Puesto que la señal de salida del elemento no puede ser menor que $-a$, entonces, siendo $y \leq -a$, su función de distribución $F_2(y)$ es igual a cero. Como la señal de salida del elemento examinado es siempre menor que a, entonces, al ser $y > a$, su función de distribución $F_2(y)$ es igual a la unidad. En el intervalo $-a < y < a$ la desigualdad $Y < y$ es equivalente a la desigualdad $X < y$ (fig. 2.2.4) y por eso

$$F_2(y) = P(Y < y) = P(X < y) = F_1(y),$$

donde $F_1(y)$ es el valor de la función de distribución $F_1(x)$ de la señal de entrada X cuando $x = y$. En virtud de la fórmula (2.1.19).

$$F_1(x) = \frac{x + 2{,}5a}{4a} \quad \text{si} \quad -2{,}5a < x < 1{,}5a.$$

Por consiguiente,

$$F_2(y) = \frac{y + 2{,}5a}{4a} \quad \text{si} \quad -a < y < a.$$

De este modo, la función de distribución de la señal de salida Y del elemento no lineal examinado se determina por la fórmula

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < -a \\ \dfrac{y + 2{,}5a}{4a} & \text{si} \quad -a < y < a, \\ 1 & \text{si} \quad y > a. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Esta función tiene saltos iguales a 3/8 y 1/8 en los puntos $y = -a$ y $y = a$. El gráfico de esta función aparece en la fig. 2.2.5.

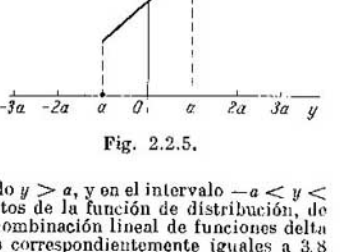


Fig. 2.2.5.

La densidad de la probabilidad de la magnitud aleatoria Y es, evidentemente, igual a cero cuando $y < -a$ y cuando $y > a$, y en el intervalo $-a < y < a$ tiene el valor constante $1/4a$. Los saltos de la función de distribución, de acuerdo con la fórmula (2.2.11), dan una combinación lineal de funciones delta $\delta(y + a)$ y $\delta(y - a)$ con los coeficientes correspondientemente iguales a 3.8 y 1/8. Por lo tanto, la densidad de la probabilidad de la magnitud aleatoria Y se puede expresar por la fórmula

$$f_2(y) = \frac{1}{4a}[1(y + a) - 1(y - a)] + \frac{3}{8}\delta(y + a) + \frac{1}{8}\delta(y - a). \tag{2.2.13}$$

De este modo, la magnitud aleatoria Y tiene un conjunto discontinuo de posibles valores que llenan el intervalo $(-a, a)$ y, además, tiene dos valores especiales $-a$ y a que tienen las probabilidades 3/8 y 1/8.

Ejemplo 2.2.2. Según los requisitos, un sistema automático debe tener la duración de servicio t_0. Si durante este período de tiempo el sistema falla, éste se somete a la reparación y vuelve a emplearse hasta que sirva el plazo t_0. Hallar la ley de distribución del tiempo de funcionamiento del sistema después de la primera reparación S.

Es evidente que la magnitud aleatoria S está ligada con el momento del primer fallo del sistema T por la fórmula

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } T \geqslant t_0, \\ t_0 - T & \text{si } T < t_0. \end{cases}$$

S no puede ser una magnitud negativa. Por eso, cuando $s \leqslant 0$, la función de distribución $F_1(s)$ de la magnitud aleatoria S es igual a cero. Cuando $s > 0$,

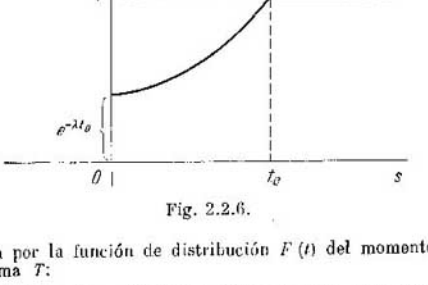


Fig. 2.2.6.

ella se expresa por la función de distribución $F(t)$ del momento del primer fallo del sistema T:

$$F_1(s) = P(S < s) = P(t_0 - T < s) = P(T > t_0 - s) = 1 - P(T < t_0 - s) = \\ = 1 - F(t_0 - s).$$

Sustituyendo aquí la expresión (2.1.26) propia a la función de distribución de la duración del servicio sin fallos del sistema T, obtendremos

$$F_1(s) = \exp\left\{-\int_0^{t_0-s} \lambda(t)\,dt\right\} \quad \text{si} \quad 0 < s < t_0. \tag{2.2.14}$$

De aquí se ve que cuando $s \to +0$ la función de distribución del tiempo de funcionamiento del sistema después de la primera reparación S tiende a un valor distinto de cero:

$$F_1(+0) = \exp\left\{-\int_0^{t_0} \lambda(t)\,dt\right\}.$$

Cuando $s \to t_0$, la función de distribución $F_1(s)$ tiende a la unidad. Derivando la fórmula (2.2.14) con respecto a s y teniendo en cuenta que $F_1(s) = 0$, siendo $s \leqslant 0$, hallaremos la densidad de la probabilidad de la magnitud aleatoria S:

$$f_1(s) = \lambda(t_0 - s)\exp\left\{-\int_0^{t_0-s} \lambda(t)\,dt\right\} + \delta(s)\exp\left\{-\int_0^{t_0} \lambda(t)\,dt\right\}. \tag{2.2.15}$$

En el caso particular cuando la intensidad de fallos $\lambda(t) = \lambda$ es constante, las fórmulas (2.2.14) y (2.2.15) toman la forma

$$F_1(s) = e^{-\lambda(t_0-s)} \quad \text{si} \quad 0 < s \leqslant t_0, \tag{2.2.16}$$

$$f_1(s) = \lambda e^{-\lambda(t_0-s)} + e^{\lambda t_0}\delta(s) \quad \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant t_0. \tag{2.2.17}$$

En las figs. 2.2.6 y 2.2.7 se muestran los gráficos de la función de distribución y de la densidad de la probabilidad de la magnitud aleatoria S. En la fig. 2.2.7 se indica convencionalmente por la flecha vertical la función delta $\delta(s)$ contenida en la expresión de la densidad de la probabilidad.

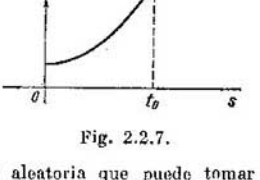


Fig. 2.2.7.

Vemos que el tiempo de funcionamiento del sistema S, después de la primera reparación hasta el fin de la duración de servicio, representa una magnitud aleatoria mixta que cuenta con valores posibles que llenan continuamente el intervalo $0 < s \leqslant t_0$ y con un valor posible exclusivo $s = 0$ que posee una probabilidad distinta de cero.

Ejemplo 2.2.3. En el problema de detección de la señal en los ruidos, la amplitud de la señal útil U es de ordinario una magnitud aleatoria que puede tomar cualquier valor, tanto positivo como negativo. La amplitud de la señal U es igual a cero cuando la señal no está presente y se recibe sólo ruido. Si, igual que en los ejemplos del § 1.3, la probabilidad de la presencia de la señal es igual a p, entonces, la probabilidad de la ausencia de la señal, es decir, la probabilidad del valor cero de su amplitud es igual a $q = 1 - p$. De este modo, la amplitud de la señal U no es más que una magnitud aleatoria de tipo mixto

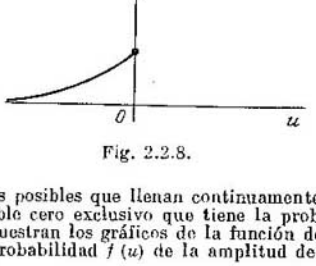


Fig. 2.2.8.

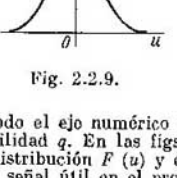


Fig. 2.2.9.

con valores posibles que llenan continuamente todo el eje numérico y con un valor posible cero exclusivo que tiene la probabilidad q. En las figs. 2.2.8 y 2.2.9 se muestran los gráficos de la función de distribución $F(u)$ y de la densidad de probabilidad $f(u)$ de la amplitud de la señal útil en el problema de detección.

Observemos que la condición de que la función delta sea unidireccional (2.2.2) es necesaria sólo para que las fórmulas concernientes a las funciones de distribución y a las densidades de la probabilidad concuerden con la definición adoptada (2.1.1) de dicha función. Por eso consideraremos que a esta condición la satisfacen solamente las funciones delta que forman parte de la expresión para las densidades de la probabilidad.

En los problemas de la Teoría de funciones aleatorias y de la Teoría de dirección automática es cómodo considerar que la función delta es par. Entonces, en vez de (2.2.2), tendrán lugar las igualda-

des

$$\int_{-\varepsilon}^{0} \delta(x)\,dx = \int_{0}^{\varepsilon} \delta(x)\,dx = \frac{1}{2} \text{ para cualquier } \varepsilon > 0. \quad (2.2.18)$$

Con ello, la función unidad escalonada $1(x)$ se determina por la fórmula

$$1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.2.19)$$

En la fig. 2.2.10 se muestra el gráfico de la función $1(x)$ de acuerdo con este caso.

La función delta par se puede obtener, por ejemplo, como el límite de la densidad normal de la probabilidad cuando $\sigma \to 0$ [véase la fórmula (2.1.17)]

$$\delta_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.2.20)$$

En efecto, para cualquier $x \neq 0$ esta función tiende a cero si $\sigma \to 0$. Cuando $x = 0$ ésta crece infinitamente si $\sigma \to 0$. Por fin, para cualquier $\varepsilon > 0$

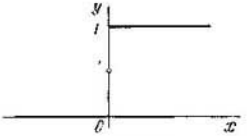


Fig. 2.2.10.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\sigma(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt.$$

Si $\sigma \to 0$, esta expresión tiende a la unidad [véase la fórmula (2) del suplemento 1]. Esto se deduce también del hecho de que el área total dispuesta bajo la curva de la densidad de la probabilidad es igual a la unidad.

Para lo ulterior necesitamos todavía representar la función delta par por la integral de Fourier. Para esto apliquemos la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - b^2 t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{b} e^{\frac{\eta^2}{4b^2}}$$

[véase la fórmula (1) del suplemento 1]. Haciendo en esta fórmula $\eta = ix$, $b = \sigma/\sqrt{2}$ y sustituyendo la variable de integración t por la variable ω, obtendremos la representación de la función $\delta_\sigma(x)$

por la integral de Fourier:

$$\delta_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}} d\omega. \qquad (2.2.21)$$

Al pasar aquí al límite para $\sigma \to 0$, obtendremos la incógnita representación buscada de la función delta por la integral de Fourier:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega. \qquad (2.2.22)$$

Al sustituir la función exponencial por su expresión mediante las funciones trigonométricas, según la fórmula de Euler

$$e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x, \qquad (2.2.23)$$

reduciremos la fórmula (2.2.22) a la forma

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x \, d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \omega x \, d\omega \right].$$

Aquí la segunda integral es igual a cero como integral de la función impar en los límites simétricos. Por consiguiente, la función delta puede ser representada por la integral de Fourier en la forma real:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x \, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos \omega x \, d\omega. \qquad (2.2.24)$$

Observemos que las integrales de las fórmulas (2.2.22) y (2.2.24) divergen. Por eso conviene entenderlas como límites de las integrales convergentes correspondientes: de la de (2.2.21) y de la que se obtiene sustituyendo la función exponencial $e^{i\omega x}$ en (2.2.21) por la expresión (2.2.23). Las fórmulas (2.2.22) y (2.2.24) son útiles para muchas aplicaciones. En particular, las necesitaremos en el capítulo 5.

En las aplicaciones se necesita frecuentemente valerse de las derivadas de la función delta. Formalmente se pueden definir como límites, cuando $\sigma \to 0$, de las derivadas correspondientes de la densidad normal de la probabilidad $\delta_\sigma(x)$ determinada por la fórmula (2.2.20).

Cumpliendo en la fórmula (2.2.6) la derivación de la integral con respecto al parámetro x, obtendremos la fórmula

$$\int_a^b \varphi(\xi)\, \delta'(x-\xi)\, d\xi = -\int_a^b \varphi(\xi)\, \delta'(\xi - x)\, d\xi = \varphi'(x), \qquad (2.2.25)$$

válida para cualquier x, $a < x < b$ y para toda función $\varphi(x)$ que tiene continua la primera derivada. Prosiguiendo de tal modo,

obtendremos la fórmula

$$\int_a^b \varphi(\xi)\,\delta^{(n)}(x-\xi)\,d\xi = (-1)^n \int_a^b \varphi(\xi)\,\delta^{(n)}(\xi-x)\,d\xi = \varphi^{(n)}(x), \qquad (2.2.26)$$

válida para cualquier x, $a < x < b$, y para toda función $\varphi(x)$ que es continua junto con sus derivadas hasta el orden n inclusive.

La deducción dada de las fórmulas (2.2.25) y (2.2.26) no es rigurosa. Para deducirlas rigurosamente, es suficiente sustituir la función delta en las integrales precedentes por la densidad normal de la probabilidad $\delta_\sigma(x)$, que se determina por la fórmula (2.2.20), cumplir la integración por partes y luego pasar al límite para $\sigma \to 0$.

§ 2.3. Momentos de una magnitud aleatoria

En el § 1.2. se indicó que como característica numérica experimental de una magnitud aleatoria X puede servir su valor medio estadístico

$$m_x^* = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta F^*(x_i), \qquad (2.3.1)$$

donde $x_1, \ldots x_n$ son los valores tomados por la magnitud aleatoria X como resultado del experimento y $\Delta F^*(x_i)$ son los incrementos de la función estadística de distribución en los puntos $x_1, \ldots, x_n$. Como resultado de las pruebas, toda magnitud aleatoria puede tomar solamente un conjunto finito de valores. Sin embargo, teóricamente, los valores posibles de una magnitud aleatoria pueden continuamente distribuirse en cierto intervalo. Por eso, de análogo teórico del valor medio estadístico de una magnitud aleatotia X sirve la integral

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, \qquad (2.3.2)$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de la magnitud aleatoria X y $f(x)$ es la densidad de la probabilidad de la misma. Esta magnitud se llama *esperanza matemática* o *valor medio* de la magnitud aleatoria X *). La esperanza matemática de una magnitud aleatoria es el resultado de la toma probabilística de todos sus valores posibles

*) Si en la fórmula (2.3.2) la integral no existe, la magnitud aleatoria no tiene esperanza matemática. Sin embargo, tal caso casi no se encuentra en los problemas de la práctica.

cuando el peso de cada uno de estos valores se toma igual a la densidad de la probabilidad del mismo.

Si los experimentos se repiten ilimitadamente, la frecuencia de que los valores de la magnitud aleatoria se encuentren en el intervalo pequeño $(x, x + \Delta x)$ se estabilizará cerca del elemento de probabilidad correspondiente $f(x)\,\Delta x$. Por eso el valor medio estadístico m_x^* tenderá a estabilizarse cerca de la esperanza matemática m_x.

Designaremos la esperanza matemática de una magnitud aleatoria X también por el símbolo $M[X]$:

$$m_x = M[X]. \tag{2.3.3}$$

Al generalizar la definición de la esperanza matemática, determinaremos la esperanza matemática de cualquier función, real o compleja, $\varphi(X)$ de la magnitud aleatoria X por medio de la igualdad

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx. \tag{2.3.4}$$

Esta determinación concuerda por completo con el sentido de la esperanza matemática: La esperanza matemática de una magnitud aleatoria $\varphi(X)$ se determina como su probabilístico valor medio pesado, cuando a cada valor posible $\varphi(x)$ de la misma se da el peso igual a la densidad de la probabilidad correspondiente $f(x)$.

Suponiendo en la fórmula (2.3.4) $\varphi^*(x) = x^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$, determinaremos los momentos de una magnitud aleatoria X. Se llama *momento inicial del orden r* o sencillamente *momento del orden r* de la magnitud aleatoria X a la esperanza matemática de su r-ésimo grado:

$$\alpha_r = M[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx. \tag{2.3.5}$$

Es evidente que la esperanza matemática de la magnitud aleatoria X representa su momento de primer orden: $m_x = \alpha_1$.

Los momentos de diferentes órdenes de una magnitud aleatoria pueden servir de características numéricas de la misma. En este caso, es evidente que una sola esperanza matemática no puede de ningún modo ser característica suficiente de la magnitud aleatoria, sino que determina solamente el valor medio cerca del cual se dispersan los valores posibles de dicha magnitud. Para caracterizar la fluctuación de la magnitud aleatoria es necesario valerse de otras características numéricas. En el § 1.2 ha sido introducida para este fin la dispersión estadística de la magnitud aleatoria determinada por la fórmula (1.2.17) ó (1.2.21). La característica teórica correspondiente se obtiene sustituyendo en la fórmula (1.2.21) la suma por la integral y el elemento de la frecuencia $P^*(x_i)$, por el correspondiente ele-

mento de probabilidad $dF(x) = f(x)\,dx$. Una característica teórica más amplia de la magnitud aleatoria la constituye el momento central de orden r que se determina por la fórmula

$$\mu_r = M[(X - m_x)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^r f(x)\,dx. \qquad (2.3.6)$$

En lo sucesivo nos encontraremos frecuentemente con la diferencia entre la magnitud aleatoria y su esperanza matemática. Por eso convengamos en llamar *magnitud aleatoria centrada* a esta diferencia y señalarla con un pequeño cero en calidad de índice superior

$$X^0 = X - m_x \qquad (2.3.7)$$

Entonces el momento central de orden r de una magnitud aleatoria X puede ser determinado como la esperanza matemática de r-ésimo grado de la correspondiente magnitud aleatoria centrada

$$\mu_r = M[(X^0)^r]. \qquad (2.3.8)$$

De la fórmula (2.3.6) se deduce que para cualquier magnitud aleatoria el momento central de primer orden es igual a cero. El momento central de segundo orden puede ser tomado en calidad de la característica de fluctuación de los valores posibles de la magnitud aleatoria y se llama *dispersión* de la misma. Designaremos la dispersión de una magnitud aleatoria X con $D[X]$ o más brevemente con D_x.

$$D_x = D[X] = M[(X^0)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx. \qquad (2.3.9)$$

De este modo, la dispersión de la magnitud aleatoria representa la esperanza matemática del cuadrado de la correspondiente magnitud aleatoria centrada.

Para tener una idea más clara acerca del sentido de la esperanza matemática y de la dispersión de la magnitud aleatoria, conviene aprovecharse de la analogía mecánica. Examinemos tal distribución de la masa en una línea recta (vástago) con la cual la densidad de la masa en cada punto es igual a la densidad de la probabilidad de la magnitud aleatoria. La masa distribuida en toda la recta será igual a la unidad en virtud de la propiedad (2.1.15) de la densidad de la probabilidad. Es evidente que entonces la esperanza matemática de la magnitud aleatoria representará la coordenada del centro de masas del vástago:

$$x_{c.\,m.} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = m_x. \qquad (2.3.10)$$

De la fórmula (2.3.9) se ve que de análogo mecánico de la dispersión de la magnitud aleatoria sirve el momento central de inercia del vástago. Cuanto mayor sea el grado de concentración de la masa cerca del centro de masas del vástago tanto menor será la dispersión de la magnitud aleatoria correspondiente.

Aplicando la fórmula del binomio de Newton, se puede expresar todos los momentos centrales de una magnitud aleatoria por medio de los momentos iniciales de la misma. Le dejamos al lector que deduzca por sí mismo las fórmulas generales y nos limitamos a deducir la correlación entre la dispersión, la esperanza matemática y el momento de segundo orden de la magnitud aleatoria. En virtud de las fórmulas (2.3.2), (2.3.5) y (2.1.15) tendremos

$$D_x = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2m_x x + m_x^2) f(x)\, dx =$$
$$= \alpha_2 - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2 - m_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

De este modo,

$$D_x = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \alpha_2 - m_x^2. \tag{2.3.11}$$

Esta fórmula es análoga a la fórmula conocida de la mecánica teórica que expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje por medio del momento de inercia respecto al eje paralelo que pasa a través del centro de masas del cuerpo.

La dispersión de la magnitud aleatoria tiene la dimensionalidad del cuadrado de la misma. Para los fines prácticos conviene más tener la medida de fluctuación de la magnitud aleatoria cuya dimensionalidad es igual a la de esta última. En calidad de tal medida se toma *la desviación cuadrático-media* de la magnitud aleatoria que se determina como la raíz cuadrada positiva de la dispersión de esta última.

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \tag{2.3.12}$$

De modo análogo, en vez del momento inicial de segundo orden conviene frecuentemente tomar la magnitud

$$\eta = \sqrt{\alpha_2} \tag{2.3.13}$$

que se denomina *valor cuadrático medio* de la magnitud aleatoria.

Ejemplo 2.3.1. Para la magnitud aleatoria X distribuida uniformemente en el intervalo $a < x < b$, las fórmulas (2.1.18), (2.3.5) y (2.3.6) dan

$$\alpha_r = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)(b-a)}.$$

$$\mu_r = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^r dx = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es impar} \\ \dfrac{(b-a)^r}{2^r (r+1)} & \text{si } r \text{ es par.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.2. La esperanza matemática y el momento inicial de segundo orden de la magnitud aleatoria X, distribuida según la ley de Rayleigh, de acuerdo con (2.1.20), (2.3.2) y (2.3.5) se determinan por las fórmulas

$$m_x = 2h^2 \int_0^\infty x^2 e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}\,.$$

$$\alpha_2 = 2h^2 \int_0^\infty x^3 e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{1}{h^2}\,.$$ *)

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (2.3.11), hallamos la dispersión de la magnitud aleatoria X:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{h^2}\,.$$

Ejemplo 2.3.3. La esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria repartida según la ley exponencial (2.1.22) se determinan por las fórmulas

$$m_x = k \int_0^\infty x e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k}\,,$$

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = k \int_0^\infty x^2 e^{-kx}\, dx - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2}\,.$$

Ejemplo 2.3.4. En las condiciones del ejemplo 2.2.1 la esperanza matemática, el momento inicial de segundo orden y la dispersión de la señal de salida de un elemento no lineal son iguales a

$$m_y = \frac{1}{4a}\int_{-a}^{a} y\, dy + \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{\infty} y\delta(y+a)\, dy + \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} y\delta(y-a)\, dy = -\frac{a}{4}\,,$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{3}a^2, \quad D_y = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{29}{48}a^2.$$

Ejemplo 2.3.5. En las condiciones del ejemplo 2.2.2. la esperanza matemática, el momento inicial de segundo orden y la dispersión del tiempo de funcionamiento S de un sistema automático después de la primera reparación se determinan por las fórmulas

$$m_s = \int_0^{t_0} s\left[\lambda e^{-\lambda(t_0-s)} + e^{-\lambda t_0}\delta(s)\right] ds = t_0 - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0}),$$

$$\alpha_2 = t_0^2 - \frac{2t_0}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}(1 - e^{\lambda t_0}),$$

$$D_s = \frac{1}{\lambda^2}(1 - e^{-2\lambda t_0}) - \frac{2t_0}{\lambda}e^{-\lambda t_0}\,.$$

Deduzcamos las fórmulas generales para la esperanza matemática y la dispersión de una magnitud aleatoria discreta. Basándose en

*) Véanse las fórmulas (13) y (14) del suplemento 1.

lo expuesto en el párrafo anterior, la densidad de la probabilidad de una magnitud aleatoria discreta X se expresa, mediante sus valores posibles x_i y las probabilidades correspondientes p_i, por la fórmula (2.2.8). Sustituyendo la expresión (2.2.8) en la fórmula (2.3.2) para la esperanza matemática, obtendremos

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i)\, dx = \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - x_i)\, dx$$

De aquí, en virtud de (2.2.6) obtenemos

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i. \tag{2.3.14}$$

De este modo, la esperanza matemática de una magnitud aleatoria discreta es igual a la suma de los productos de los valores posibles de la misma por sus probabilidades. La fórmula obtenida se considera frecuentemente como determinación de la esperanza matemática de la magnitud aleatoria discreta. De modo semejante obtendremos la fórmula siguiente para la dispersión de una magnitud aleatoria discreta X:

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m_x)^2. \tag{2.3.15}$$

La comparación de las fórmulas (2.3.14) y (2.3.15) con (1.2.16) y (1.2.19) respectivamente comprueba una vez más que la esperanza matemática y la dispersión son los análogos teóricos de la media empírica y de la dispersión empírica. En las fórmulas (1.2.16) y (1.2.19) los valores de las magnitudes aleatorias X y $(X - m_x)^2$ obtenidos experimentalmente se multiplican por las frecuencias de estos valores halladas como resultado de pruebas. En las fórmulas (2.3.14) y (2.3.15) los valores posibles de estas magnitudes se multiplican por las probabilidades de dichos valores.

Ejemplo 2.3.6. Hallar la esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria X subordinada a la distribución binominal (el número de veces que se produce el acontecimiento al efectuar n experimentos independientes).

En el § 1.4 se demostró que la probabilidad $P_{k,n}$ de que cierto acontecimiento suceda k veces al efectuar n pruebas independientes es igual a

$$P_{k,\,n} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (p + q = 1).$$

Compongamos la función $S(u)$:

$$S(u) = (q + pu)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} u^k = \sum_{k=0}^{n} P_{k,\,n} u^k.$$

Entonces obtendremos

$$m_x = \sum_{k=0}^{n} P_{k,\,n} k = S'(1) = np\,(q+p)^{n-1} = np,$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{d}{du}\{[uS'(u)\}\right]_{u=1} = np\,(q+np),$$

$$D_x = npq.$$

§ 2.4. Función característica de una magnitud aleatoria

En muchos problemas, como característica útil de la magnitud aleatoria sirve su *función característica*. Se llama función característica de una magnitud aleatoria X a la esperanza matemática de la magnitud aleatoria compleja $e^{i\lambda X}$ considerada como función del parámetro λ. Aplicando la fórmula (2.3.4), obtendremos la expresión siguiente para la función característica de la magnitud aleatoria X:

$$g(\lambda) = M[e^{i\lambda X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx. \tag{2.4.1}$$

Puesto que $|e^{i\lambda x}| = 1$ para cualesquiera valores reales de λ y x, entonces, en virtud de la propiedad principal de la densidad de la probabilidad (2.1.15), la función característica para cualquier valor real de λ no sobrepasa en módulo a la unidad y es igual a la unidad cuando $\lambda = 0$.

La densidad de la probabilidad $f(b)$ de una magnitud aleatoria continua X es función integrable no negativa en todo el eje numérico. Por eso, si es continua o tiene un número finito de puntos de discontinuidad, puede ser representada por la integral de Fourier *):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\lambda(\xi - x)}\, d\xi \tag{2.4.2}$$

Se puede demostrar que esta fórmula es válida también en caso de que $f(x)$ contenga una combinación lineal de las funciones delta**). De este modo, la fórmula (2.4.2) es válida para las densidades de las probabilidades de magnitudes aleatorias cualesquiera. Pero en virtud de (2.4.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\lambda(\xi - x)}\, d\xi = e^{-i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi = e^{-i\lambda x} g(\lambda).$$

*) G. I. Fichtenholz, Curso del Cálculo diferencial e integral. Fizmatguiz, 1959, cap. 19, § 6.

**) Véase, por ejemplo, V. S. Pugachev. Teoría de magnitudes aleatorias y su aplicación en los problemas del mando automático. Fismatguiz, 1962, cap. 4. (Versión inglesa: V. S. Pugachow. Theory of Random Functions and its Application to Control Problems. Pergamon Press, 1965 chapt. 4).

Por eso la fórmula (2.4.2) puede ser escrita en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} g(\lambda)\, d\lambda. \qquad (2.4.3)$$

Esta fórmula expresa la densidad de la probabilidad de la magnitud aleatoria X por medio de su función característica.

De este modo, la función característica de una magnitud aleatoria es su característica probabilística completa. Conociendo la función característica de la magnitud aleatoria, se puede hallar la densidad de la probabilidad de la misma y, por consiguiente, la función de distribución, es decir, determinar por completo la ley de distribución de la magnitud aleatoria.

Las fórmulas (2.4.1) y (2.4.3) muestran que la función característica y la densidad de la probabilidad de una magnitud aleatoria están enlazadas por un par de transformaciones recíprocamente inversas de Fourier.

Ejemplo 2.4.1. La función característica de la distribución binomial se expresa por la fórmula

$$g(\lambda) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} e^{i\lambda m} = (q + pe^{i\lambda})^n. \qquad (2.4.4)$$

Ejemplo 2.4.2. La función característica de cualquier magnitud aleatoria discreta se expresa por la fórmula

$$g(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu e^{i\lambda x_\nu}, \qquad (2.4.5)$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son los valores posibles de la magnitud aleatoria y $p_1, \ldots, p_n$ son las probabilidades de estos valores. La fórmula (2.4.5) es válida también cuando $n = \infty$.

Ejemplo 2.4.3. La función característica de una magnitud aleatoria repartida uniformemente en el intervalo $a < x < b$ tiene la forma

$$g(\lambda) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{i\lambda x}\, dx = \frac{1}{i\lambda(b-a)} (e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}). \qquad (2.4.6)$$

Ejemplo 2.4.4. La función característica de una magnitud aleatoria distribuida según la ley exponencial se expresa por la fórmula

$$g(\lambda) = k \int_0^{\infty} e^{-x(k-i\lambda)}\, dx = \frac{k}{k - i\lambda}. \qquad (2.4.7)$$

Ejemplo 2.4.5. La función característica de la señal de salida Y en el ejemplo 2.2.1 se determina por la fórmula

$$g(\lambda) = \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y} \left\{ |1(y+a) - 1(y-a)| + \frac{3}{8}\delta(y+a) + \frac{1}{8}\delta(y-a) \right\} dy =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} a\lambda}{2a\lambda} + \frac{3}{8} e^{-i\lambda a} + \frac{1}{8} e^{i\lambda a}. \qquad (2.4.8)$$

Ejemplo 2.4.6. La función característica del tiempo S de funcionamiento del sistema automático después de la primera reparación, en el ejemplo 2.2.2, siendo constante la intensidad de los fallos $\lambda(t) = c$, tiene la forma

$$g(\lambda) = \int_0^{T_0} e^{i\lambda s} [ce^{-c(T_0-s)} + \delta(s) e^{-cT_0}] ds =$$

$$= e^{-cT_0} + \frac{c(e^{i\lambda T_0} - e^{-cT_0}}{c + i\lambda}. \quad (2.4.9)$$

Los momentos de una magnitud aleatoria se expresan fácilmente por medio de la función característica de la misma. En efecto, derivando la fórmula (2.4.1) con respecto a λ, obtendremos

$$g'(\lambda) = i \int_{-\infty}^{\infty} xe^{i\lambda x} f(x)\, dx,$$

$$g''(\lambda) = i^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{i\lambda x} f(x)\, dx$$

y en general

$$g^{(k)}(\lambda) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{i\lambda x} f(x)\, dx \quad (k = 1, 2 \ldots). \quad (2.4.10)$$

Para $\lambda = 0$ las integrales en los segundos miembros de las fórmulas obtenidas representan los momentos de la magnitud aleatoria X. Por eso, suponiendo que en (2.4.10) $\lambda = 0$, obtendremos

$$\alpha_k = \frac{1}{i^k} g^{(k)}(0) \quad (k = 1, 2, \ldots). \quad (2.4.11)$$

Observemos que la derivación de la integral (2.4.1) con respecto al parámetro λ bajo el signo integral es posible solamente en caso de que, como resultado de la derivación, se obtenga una integral uniformemente convergente, es decir, si el momento correspondiente de la magnitud aleatoria X existe. De este modo la fórmula (2.4.11.) determina todos los momentos existentes de la magnitud aleatoria X.

Análogamente, por medio de la función característica se puede expresar los momentos centrales. Multiplicando la fórmula (2.4.1) por $e^{-i\lambda m_x}$ y derivando la igualdad obtenida con respecto a λ, tendremos

$$[e^{-i\lambda m_x} g(\lambda)]^{(k)} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k e^{i\lambda(x-m_x)} d(x)\, dx.$$

Suponiendo que aquí $\lambda = 0$, obtendremos la fórmula siguiente para los momentos centrales de la magnitud aleatoria X:

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} [e^{-i\lambda m_x} g(\lambda)]^{(k)}_{\lambda=0} \quad (k = 2, 3, \ldots). \qquad (2.4.12)$$

Ejemplo 2.4.7. Hallar la esperanza matemática y la dispersión del número X de veces que sucede cierto acontecimiento al efectuar n pruebas independientes, si para una sola prueba la probabilidad de que el acontecimiento se produzca es igual a p.

Derivemos la relación (2.4.4):

$$g'(\lambda) = inpe^{i\lambda}(q + pe^{i\lambda})^{n-1}$$

$$g''(\lambda) = i^2 npe^{i\lambda}(q + pe^{i\lambda})^{n-2}(q + npe^{i\lambda}).$$

Entonces, según las fórmulas (2.4.11) y (2.3.11), obtenemos

$$m_x = \alpha_1 = \frac{1}{i} g'(0) = np,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{i^2} g''(0) = np(q + np), \quad D_x = \alpha_2 - \alpha_1^2 = npq.$$

Le dejamos al lector que por sí mismo calcule $D_x = \mu_2$ aplicando la fórmula (2.4.12).

Ejemplo 2.4.8. Hallar la esperanza matemática y la dispersión de una magnitud aleatoria X uniformemente repartida.

Escribamos la fórmula (2.4.6) en la forma

$$g(\lambda) = \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda(b-a)} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{k-1}}{k!} (b^k - a^k).$$

De aquí por derivación hallamos

$$g'(\lambda) = \frac{i}{b-a} \left[\frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{k-2}}{k(k-2)!} (b^k - a^k) \right],$$

$$g''(\lambda) = \frac{i^2}{b-a} \left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{k-3}}{k(k-3)!} (b^k - a^k) \right].$$

Supongamos que aquí $\lambda = 0$ y sustituyamos las expresiones obtenidas en (2.4.11).

Entonces obtendremos

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(a + b), \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

$$D = \frac{1}{12} b^2 - \frac{1}{6} ab + \frac{1}{12} a^2 = \frac{1}{12}(a - b)^2.$$

§ 2.5. Ley normal de distribución (Ley de Gauss)

La densidad de la probabilidad de una magnitud aleatoria X normalmente repartida se expresa por la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2.5.1)$$

con la que nos conocimos en el § 2.1. En la fig. 2.5.1. se muestra la curva que representa esta densidad de la probabilidad. La curva es simétrica respecto al punto $x = a$. Por eso el parámetro a se llama

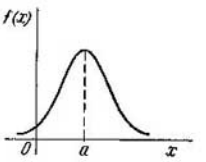


Fig. 2.5.1.

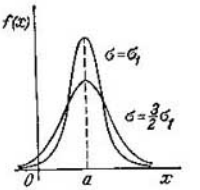


Fig. 2.5.2.

centro de distribución o centro de dispersión. Cuando $x = a$, la ordenada de la curva de la densidad normal de la probabilidad es igual a $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Al disminuir σ, esta ordenada crece ilimitadamente. En este caso la curva va achatándose a lo largo del eje de abscisas de modo que su área queda igual a la unidad (fig. 2.5.2). Esto se deriva de la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h} \qquad (2.5.2)$$

para $h = 1/\sigma\sqrt{2}$, cuya deducción se expone en el suplemento 1. De este modo, al disminuir σ, la densidad de la probabilidad en el centro de dispersión crece y en los demás puntos, a partir de cierto valor de σ, se reduce. Con otras palabras, al disminuir σ disminuye la dispersión de los valores posibles de la magnitud aleatoria.

La ley normal de distribución esta muy difundida en los problemas prácticos. Por eso se ha hecho muchas tentativas de deducirla teóricamente basándose en hipótesis iniciales sencillas. Varias deducciones de la ley normal de distribución fueron ofrecidas por Gauss. Sin embargo, la base de todas estas deducciones la constituyen tesis que ellas mismas deben ser aún fundamentadas. Fue Liapunov el que por primera vez llegó a aclarar las causas de la amplia difusión de la ley normal de distribución. Este científico demostró que si

una magnitud aleatoria puede considerarse como la suma de un gran número de pequeños sumandos; entonces, al ser las condiciones lo suficiente comunes, la ley de distribución de dicha magnitud se aproxima a la normal sin que importe cuales sean las leyes de distribución de los sumandos tomados por separado. Puesto que prácticamente las magnitudes aleatorias, en la mayoría de los casos, suelen ser el resultado de la acción de un gran número de diferentes causas (véase el § 1.1.), la ley normal resulta ser el principio de distribución más difundido. No obstante, en muchos problemas se pueden encontrar leyes de distribución distintas de la normal. Nos hemos convencido ya de esto en los ejemplos de los §§ 2.1 y 2.2.

Hallemos los momentos de una magnitud aleatoria normalmente repartida. Para esto hagamos uso de las fórmulas siguientes cuya deducción se expone en el suplemento 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k-1} e^{-h^2 t^2}\, dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.5.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-h^2 t^2}\, dt = \frac{(2k-1)!!}{2^k h^{2k+1}} \sqrt{\pi} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.5.4}$$

donde con $(2k-1)!!$ se designa el producto de todos los números enteros impares a partir de 1 hasta de $2k-1$.

De acuerdo con (2.3.2) y (2.5.1) la esperanza matemática de una magnitud aleatoria normalmente repartida se expresa por la fórmula

$$m_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx. \tag{2.5.5}$$

Sustituyendo las variables $t = x - a$ y valiéndose de las fórmulas (2.5.2) y (2.5.3) siendo $k = 1$, $h = 1/\sigma\sqrt{2}$, obtendremos

$$m_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a+t)\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = a. \tag{2.5.6}$$

Este resultado podía ser previsto de antemano, teniendo en cuenta la simetría de la distribución normal con respecto al centro de distribución a.

Para determinar los momentos centrales, apliquemos la fórmula (2.3.6). Sustituyendo en esta fórmula la expresión (2.5.1) de la densidad normal de la probabilidad y teniendo en consideración (2.5.6), obtendremos

$$\mu_r = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^r\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^r e^{-\frac{t}{2\sigma^2}}\, dt. \tag{2.5.7}$$

En virtud de la formula (2.5.3) esta integral para todos los valores impares de r es igual a cero. Por consiguiente, todos los momento centrales de los órdenes impares de una magnitud normalmente distribuida son iguales a cero:

$$\mu_{2k-1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.5.8}$$

Si $r = 2k$ es par, entonces haciendo uso de la fórmula (2.5.4) para $h = 1/\sigma\sqrt{2}$, obtendremos de (2.5.7.)

$$\mu_{2k} = (2k-1)!!\sigma^2 = 1.3.5 \ldots$$
$$\ldots (2k-1)\,\sigma^2 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.5.9}$$

En particular, para la dispersión y la desviación cuadrática media de una magnitud aleatoria X repartida normalmente, obtendremos las fórmulas

$$D_x = \mu_2 = \sigma^2, \quad \sigma_x = \sqrt{D}_x = \sigma. \tag{2.5.10}$$

De este modo, el parámetro σ en la expresión (2.5.1) de la ley normal de distribución representa la desviación cuadrática media de la magnitud aleatoria.

Basándose en la primera de estas fórmulas, la expresión (2.5.9) para los momentos de los órdenes pares se puede escribir en la forma

$$\mu_{2k} = (2k-1)!! \qquad D_x^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)\,D_x^k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.5.11}$$

Pues bien, todos los momentos de los órdenes pares de la magnitud aleatoria normalmente repartida se expresan por medio de su dispersión.

Sustituyendo en (2.5.1) la expresión del parámetro σ en función de la dispersión de la primera de las fórmulas (2.5.10) y teniendo en cuenta (2.5.6), obtendremos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D_x}}. \tag{2.5.12}$$

Esta fórmula muestra que la ley normal de distribución se determina por completo por la esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria. Así pues, la esperanza matemática y la dispersión caracterizan de un modo completo la magnitud aleatoria normalmente repartida. Claro está, que en el caso general, cuando el carácter de la ley de distribución es desconocido, para determinar esta última no basta saber la esperanza matemática y la dispersión.

Sustituyendo en (2.5.12) D_x por σ_x^2, expresemos la densidad normal de la probabilidad por medio de la esperanza matemática y la desviación cuadrática media de la magnitud aleatoria:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{2.5.13}$$

Hallemos la función característica de una magnitud aleatoria X normalmente distribuida. Para esto sustituyamos la expresión (2.5.12) de la densidad de la probabilidad en la fórmula (2.4.1). Entonces obtendremos

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \frac{(x-m_x)^2}{2D_x}} dx =$$

$$= \frac{e^{i\lambda m_x}}{\sqrt{2\pi D_x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t - \frac{t^2}{2D_x}} dt.$$

La última integral se puede calcular por la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h} e^{\frac{\eta^2}{4h^2}},$$

cuya deducción se da en el suplemento. Aplicando esta fórmula, obtendremos

$$g(\lambda) = e^{i\lambda m_x - \frac{1}{2} D_x \lambda^2}. \tag{2.5.14}$$

Le dejamos al lector obtener independientemente con ayuda de la función característica hallada, las fórmulas, anteriormente deducidas, para los momentos centrales de la magnitud aleatoria normalmente distribuida.

Deduzcamos ahora la fórmula para la probabilidad de que los valores de una magnitud aleatoria X normalmente repartida se encuentren en el intervalo dado (α, β). Sustituyendo la expresión (2.5.13) de la densidad normal de la probabilidad en la fórmula (2.1.16), obtendremos

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Después de sustituir las variables $z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$, esta fórmula toma la forma

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}}^{\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{2.5.15}$$

Esta integral no se expresa por medio de las funciones elementales. Por eso, para calcularla, se introduce una función nueva

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{2.5.16}$$

Esta función se denomina *función de Laplace* o *integral de las probabilidades*. Para ella están preparadas Tablas semejantes a las bien conocidas Tablas de Logaritmos y Funciones Trigonométricas. La Tabla de la Función de Laplace se da al final del libro. Aplicando la función de Laplace, se puede escribir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}}^{\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}\right). \quad (2.5.17)$$

Al sustituir esta expresión en (2.5.15), obtendremos

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}\right). \quad (2.5.18)$$

Demostremos ahora que la función $\Phi(u)$ es impar. Tenemos

$$\Phi(-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{-u} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz. \quad (2.5.19)$$

Al efectuar aquí la sustitución de las variables $t = -z$ y al tener en cuenta (2.5.16), obtendremos

$$\Phi(-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -\Phi(u), \quad (2.5.20)$$

lo que demuestra la imparidad de la función $\Phi(u)$.

En el caso particular, cuando el intervalo (α, β) es simétrico con respecto al centro de dispersión, las magnitudes α y β pueden ser expresadas en la forma $\alpha = m_x - \varepsilon$, $\beta = m_x + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$, y la fórmula (2.5.18) toma la forma

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right). \quad (2.5.21)$$

De aquí, teniendo en consideración la imparidad de la función $\Phi(u)$, obtendremos

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right). \quad (2.5.22)$$

Las fórmulas (2.5.18) y (2.5.22) dan la posibilidad de calcular con ayuda de la Tabla de la Función $\Phi(u)$ de la probabilidad de que los valores de una magnitud normalmente repartida se encuentren en cualquier segmento asignado de antemano del eje numérico.

Ejemplo 2.5.1. Hallar la probabilidad de que el valor, que toma una magnitud aleatoria X normalmente repartida como resultado de la prueba, será no menor de 1 m y no mayor de 7 m, si la esperanza matemática de la misma es igual a 3 m y la desviación cuadrática media es igual a 2 m.

Según la fórmula (2.5.18), teniendo en cuenta la imparidad de la función de Laplace y empleando la Tabla de la Función de Laplace, hallamos

$$P(1 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(1) = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185.$$

Ejemplo 2.5.2. En las condiciones del ejemplo anterior hallar la probabilidad de que la magnitud aleatoria X tome un valor no menor de 2 m y no mayor de 4 m.

El intervalo (2,4) es simétrico con respecto al punto $x = 3$ siendo $\varepsilon = m_x - \alpha = \beta - m_x = 1$. Por eso hacemos uso de la fórmula (2.5.22). Entonces, empleando la Tabla de la Función de Laplace, obtendremos

$$P(2 < X < 4) = P(|X - 3| < 1) = 2\Phi(0{,}5) = 0{,}3830.$$

Ejemplo 2.5.3. Hallar las probabilidades p_1, p_2, p_3, p_4 de que los valores de una magnitud aleatoria normalmente repartida se encuentren en los segmentos de $2\sigma_x$, $4\sigma_x$, $6\sigma_x$, $8\sigma_x$ de longitud dispuestos simétricamente con respecto al centro de distribución. Por la fórmula (2.5.22) hallamos

$$p_k = P(|X - m_x| < k\sigma_x) = 2\Phi(k).$$

En la Tabla encontramos $\Phi(1) = 0{,}3413$; $\Phi(2) = 0{,}4772$; $\Phi(3) = 0{,}49865$; $\Phi(4) = 0{,}499968$. Por consiguiente, las probabilidades buscadas son $p_1 = 0{,}6826$; $p_2 = 0{,}9544$; $p_3 = 0{,}9973$; $p_4 = 0{,}999936$.

Así pues, solamente cerca del 32% de los valores de la magnitud aleatoria normalmente repartida se desvía de su esperanza matemática más que en σ_x; solamente cerca del 5% se desvía más que en $2\sigma_x$; solamente cerca de un 0,3% se desvía más que en $3\sigma_x$ y solamente cerca del 0,006% se desvía más que en $4\sigma_x$. Esto da lugar a que en la mayor parte de los problemas de la práctica se consideren prácticamente imposibles, para la magnitud aleatoria normalmente repartida, las desviaciones que superen $3\sigma_x$ y se consideren limitados por el intervalo $(m_x - 3\sigma_x,\ m_x + 3\sigma_x)$ todos los valores prácticamente posibles de la misma.

§ 2.6. Ley de Poisson

Supongamos que ciertos acontecimientos sucedan en los momentos aleatorios continuamente repartidos en el eje numérico. Tales acontecimientos forman una secuencia de sucesos llamada habitualmente flujo de acontecimientos. En calidad de ejemplo de un flujo de acontecimientos pueden servir las llamadas de los abonados en una central telefónica, pasos de los medios de transporte por un cruce, fallos de los elementos de algún sistema técnico.

En muchos problemas de la práctica se puede considerar que el flujo de acontecimientos satisface las condiciones siguientes:

1) si (t_1, t_2) y (t_3, t_4) son cualesquiera intervalos de tiempo no sobrepuestos, entonces, la probabilidad de que se produzca cualquier número de acontecimientos en el transcurso de uno de dichos intervalos no depende de cuántos acontecimientos ocurren en el transcurso de otro;

2) la probabilidad de que un acontecimiento se produzca en el transcurso de un intervalo de tiempo infinitesimal $(t, t + \Delta t)$ es una infinitesimal de orden Δt;

3) la probabilidad de que se produzca más de un acontecimiento en el transcurso del intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ es una infinitesimal de orden superior en comparación con Δt.

Es evidente que el número de acontecimientos que suceden durante cualquier intervalo de tiempo (t_0, t) representa una magnitud aleatoria discreta cuyos valores posibles son todos los números enteros no negativos 0, 1, 2, . . . Designemos esta magnitud aleatoria por $X(t)$ y la probabilidad de que ésta tome el valor de m designémosla por $p_m(t_0, t)$ o, más brevemente, por $p_m(t)$:

$$P(X = m) = p_m(t_0, t) = p_m(t) \quad (m = 0, 1, 2 \ldots). \tag{2.6.1}$$

Hallemos la ley de distribución de esta magnitud aleatoria.

Para calcular las probabilidades $p_m(t)$, demos al argumento t un incremento infinitesimal Δt. De acuerdo con las dos últimas condiciones superpuestas en el flujo de acontecimientos

$$\left.\begin{aligned} p_1(t, t + \Delta t) &= \nu(t)\,\Delta t + o(\Delta t), \\ \sum_{k=2}^{\infty} p_k(t, t + \Delta t) &= o(\Delta t), \end{aligned}\right\} \tag{2.6.2}$$

donde $\nu(t)$ es cierta función no negativa que consideraremos conocida*). Calculemos primeramente $p_0(t)$. Para ello observemos que $p_0(t + \Delta t)$ es la probabilidad de que dos acontecimientos coincidan: ningún acontecimiento se produce en el intervalo (t_0, t) ni en el intervalo $(t, t + \Delta t)$. Según la primera condición estos dos acontecimientos son independientes. Por eso

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)\, p_0(t, t + \Delta t). \tag{2.6.3}$$

Pero en virtud de (2.6.2)

$$p_0(t, t + \Delta t) = 1 - \nu(t)\,\Delta t + o(\Delta t). \tag{2.6.4}$$

Sustituyendo esta expresión en (2.6.3), obtendremos

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) - p_0(t)\,\nu(t)\,\Delta t + o(\Delta t),$$

*) Con el símbolo $o(\Delta t)$ se designa cualquiera (no una concreta) infinitesimal de orden superior en comparación con Δt, así que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Es evidente que la suma de cualquier número finito de tales magnitudes es también la magnitud $o(\Delta t)$.

de donde

$$\frac{p_0(t+\Delta t-p_0(t)}{\Delta t} = -\nu(t)\, p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Pasando al límite cuando $\Delta t \to 0$, obtendremos

$$p_0'(t) = -\nu(t)\, p_0(t). \tag{2.6.5}$$

Así pues, para la probabilidad incógnita $p_0(t)$ hemos recibido una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden. Para hallar la condición inicial que determina a la constante de integración, basta tomar en la fórmula (2.6.4) $t = t_0$ y pasar al límite cuando $\Delta t \to 0$.

Entonces obtendremos

$$p_0(t_0) = 1. \tag{2.6.6}$$

Para componer las ecuaciones para las demás probabilidades $p_m(t)$, observemos que m acontecimientos pueden suceder en el intervalo de tiempo $(t_0, t + \Delta t)$ por uno de los $m + 1$ procedimientos incompatibles siguientes: todos los m acontecimientos se producen en el intervalo (t_0, t); $m - 1$ acontecimientos, en el intervalo (t_0, t) y uno, en el intervalo $(t, t + \Delta t)$; $m - 2$ acontecimientos ocurren en el intervalo (t_0, t) y dos, en el intervalo $(t, t + \Delta t)$; todos los m acontecimientos se producen en el intervalo $(t, t + \Delta t)$. Por eso, basándose en el principio de la adición de probabilidades de los acontecimientos incompatibles y en el de la multiplicación de las probabilidades para los acontecimientos independientes

$$p_m(t + \Delta t) = p_m(t)\, p_0(t,\ t + \Delta t) + p_{m-1}(t)\, p_1(t,\ t + \Delta t) + \ldots + p_0(t)\, p_m(t,\ t + \Delta t).$$

Sustituyendo aquí la expresión (2.6.2) y uniendo todas las infinitesimales de orden superior por un solo símbolo $o(\Delta t)$, obtendremos

$$p_m(t + \Delta t) = p_m(t) + [p_{m-1}(t) - p_m(t)]\, \nu(t)\, \Delta t + o(\Delta t),$$

de donde

$$\frac{p_m(t+\Delta t) - p_m(t)}{\Delta t} = \nu(t)\, [p_{m-1}(t) - p_m(t)] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Al pasar al límite cuando $\Delta t \to 0$, obtendremos

$$p_m'(t) = \nu(t)\, [p_{m-1}(t) - p_m(t)]. \tag{2.6.7}$$

Así pues, para determinar todas las probabilidades $p_m(t)$ hemos obtenido una cadena de ordinarias ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Para hallar las condiciones iniciales, basta tomar en (2.6.2) $t = t_0$ y pasar al límite para $\Delta t \to 0$. Entonces obtendremos

$$p_m(t_0) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{2.6.8}$$

Hagamos en las ecuaciones (2.6.5) y (2.6.7) la sustitución de las variables

$$\lambda = \int_{t_0}^{t} \nu(\tau)\, d\tau. \tag{2.6.9}$$

Esto es posible ya que la función $\nu(t)$ no es negativa, en virtud de lo cual λ es la función no decreciente monótona t. Teniendo en consideración que en virtud de (2.6.9) $d\lambda/dt = \nu(t)$, escribamos las ecuaciones (2.6.5) y (2.6.7) respectivamente en la forma

$$\frac{dp_0}{d\lambda} = -p_0 \tag{2.6.10}$$

$$\frac{dp_m}{d\lambda} = -p_m + p_{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{2.6.11}$$

Integrando la ecuación (2.6.10) y teniendo en cuenta la condición inicial que se deriva de (2.6.6) y (2.6.9): $p_0 = 1$ para $\lambda = 0$, obtendremos

$$p_0 = e^{-\lambda}. \tag{2.6.12}$$

Luego, integrando sucesivamente las ecuaciones (2.6.11) que corresponden a $m = 1, 2, \ldots$, y teniendo en cuenta que en virtud de (2.6.8) y (2.6.9) $p_1 = p_2 = \ldots = 0$ para $\lambda = 0$, llegaremos a la fórmula general

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.6.13}$$

En efecto, suponiendo que la fórmula (2.6.13) es válida cuando $m = k$ y sustituyendo la expresión (2.6.13) de la probabilidad p_k en la ecuación (2.6.11) correspondiente a $m = k+1$, obtendremos para la probabilidad p_{k+1} la ecuación

$$p'_{k+1} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - p_{k+1}. \tag{2.6.14}$$

Es fácil convencerse, haciendo la sustitución directa, que la integral de la ecuación (2.6.14), que se convierte en cero para $\lambda = 0$, se expresa por la fórmula

$$p_{k+1} = \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda}.$$

Así pues, la fórmula (2.6.13) es válida para $m = k + 1$, si ésta es válida para $m = k$. Pero la fórmula (2.6.12) deducida anteriormente muestra que la fórmula (2.6.13) es válida para $m = 0$. Por consiguiente, la fórmula (2.6.13) es válida para cualquier m.

La fórmula (2.6.13) determina por completo la ley de distribución del número X de acontecimientos que se producen en el transcurso del intervalo de tiempo dado (t_0, t). Esta ley de distribución se llama ley de Poisson.

Aclaremos el sentido del parámetro λ. Para esto calculemos la esperanza matemática del número de acontecimientos que se producen durante el intervalo de tiempo (t_0, t). Valiéndonos de la fórmula general (2.3.14) para la esperanza matemática de una magnitud aleatoria discreta y la fórmula (2.6.13), obtendremos

$$M[X] = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m = 0 \cdot p_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m p_m =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} + \ldots\right).$$

La serie del segundo miembro de esta igualdad representa la descomposición conocida de la función exponencial e^{λ}. Por lo tanto,

$$M[X] = \lambda. \tag{2.6.15}$$

Pues bien, el parámetro λ representa la esperanza matemática de la magnitud aleatoria repartida según la ley de Poisson (del número de acontecimientos en el intervalo de tiempo dado).

De lo demostrado y de la fórmula (2.6.9) se deduce que la magnitud $\Delta\lambda = \nu(t)\,\Delta t$ en el punto de continuidad t de la función $\nu(t)$ representa, con una exactitud hasta infinitesimales de órdenes superiores, la esperanza matemática del número de acontecimientos que se producen en el transcurso de un intervalo de tiempo infinitesimal Δt. Por consiguiente, la magnitud $\nu t = d\lambda/dt$ representa la velocidad media de producción de los acontecimientos o el número medio de acontecimientos que suceden en la unidad de tiempo. Por eso la magnitud $\nu(t)$ se denomina *densidad media* o *intensidad* del flujo de acontecimientos.

Los flujos de acontecimientos del tipo examinado se llaman *poissonianos*, puesto que el número de acontecimientos que se producen en el transcurso de cualquier intervalo de tiempo representa para tal flujo una magnitud aleatoria repartida según la ley de Poisson.

Ejemplo 2.6.1. Hallar la ley de distribución del número de electrones emitidos por el cátodo de un tubo electrónico durante el intervalo de tiempo τ, suponiendo que la cantidad media de electrones que se emiten en la unidad de tiempo es igual a ν.

En vista de que la cantidad total de electrones emitidos por el cátodo es enorme, el problema dado conviene por completo al esquema de surgimiento de la distribución de Poisson. Es decir, se puede considerar que para una infinitesimal τ la probabilidad de que durante este intervalo se emita un electrón es una magnitud de orden τ y la probabilidad de que en el transcurso del intervalo τ se haya lanzado más de un electrón debe ser una infinitesimal de segundo orden puesto que prácticamente es imposible que estrictamente en un instante se lan-

cen dos electrones o más. Si tomamos distintos intervalos de tiempo no sobrepuestos, entonces se puede con suficiente evidencia considerar que la cantidad de electrones lanzados durante uno de estos intervalos no influye en las probabilidades para los diferentes valores del número de electrones emitidos en el transcurso de otro intervalo de tiempo. Ahora bien, prácticamente se cumplen todas las condiciones del problema examinado y el flujo de electrones se puede considerar poissoniano. Para aprovecharse de la ley de Poisson, hay que hallar la esperanza matemática del número de electrones emitidos durante el intervalo de tiempo τ, es decir, el número medio de electrones emitidos en el transcurso del tiempo τ. Como, según la condición, en la unidad de tiempo se lanzan por término medio ν electrones, en el transcurso del tiempo τ se lanzarán por término medio $\nu\tau$ electrones. Por eso, en el caso dado, $\lambda = \nu\tau$. Sustituyendo esta expresión en la fórmula (2.6.13), obtendremos

$$p_m = \frac{(\nu\tau)^m}{m!} e^{-\nu\tau} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.6.16}$$

Esta fórmula determina por completo la ley de distribución del número de electrones emitidos por el cátodo durante el intervalo de tiempo τ.

Ejemplo 2.6.2. En condiciones del ejemplo anterior hallar la ley de distribución del intervalo de tiempo entre dos instantes sucesivos de emisión de electrones.

En virtud de que los electrones se lanzan del cátodo en instantes aleatorios, el intervalo de tiempo entre dos momentos sucesivos del lanzamiento de los electrones es una magnitud aleatoria. Según la definición, la función de distribución de la magnitud aleatoria T representa la probabilidad de que el intervalo T entre dos instantes sucesivos de emisión de electrones será menor que t, es decir, la probabilidad de que en el intervalo de duración t se lance, por lo menos, un electrón. Según la fórmula (1.3.4) que enlaza las probabilidades de acontecimientos contrarios

$$P(T < t) = 1 - P(T > t).$$

La probabilidad $P(T > t)$ de que durante el tiempo t no se lance del cátodo ni un solo electrón se puede determinar por la fórmula (2.6.16) del ejemplo anterior, tomando $\tau = t$, $m = 0$:

$$P(T > t) = e^{-\nu t}.$$

Por eso

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\nu t}.$$

Derivando esta fórmula con respecto a t, hallamos la densidad de la probabilidad de la magnitud aleatoria T:

$$f(t) = F'(t) = \nu e^{-\nu t}.$$

Las fórmulas obtenidas determinan la función de distribución y la densidad de la probabilidad del intervalo T entre dos instantes sucesivos de emisión de electrones para $t \geqslant 0$. Puesto que la magnitud del intervalo T no puede ser negativa, entonces, para $t < 0$ tenemos

$$f(t) = 0, \qquad F(t) = 0.$$

Como vemos, el intervalo de tiempo entre dos lanzamientos sucesivos de electrones está repartido según la ley exponencial.

Ejemplo 2.6.3. Hallar la ley de distribución del número de llamadas a la central telefónica durante el intervalo de tiempo dado (t_1, t_2).

Este problema se distingue del anterior solamente por el hecho de que no podemos considerar que el número medio de llamadas en la unidad de tiempo sea independiente de la hora del día. Por eso debemos admitir que el número medio de llamadas ν en la unidad de tiempo depende del instante t. Más precisamente, el número medio de llamadas en el transcurso de un intervalo infi-

nitesimal de tiempo $(t, t + dt)$ se debe tomar igual a $\nu(t)\,dt$, donde la intensidad del flujo de llamadas $\nu(t)$ es la función de tiempo dada.

Es evidente que en el problema en cuestión también se cumplen prácticamente las condiciones en las cuales es válida la ley de Poisson. La probabilidad de cualquier número de llamadas durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2) puede ser considerada independiente de cuántas llamadas lleguen en el transcurso de otros intervalos de tiempo que no se sobreponen al intervalo (t_1, t_2). La llamada simultánea a la estación efectuada por más que un abonado es prácticamente un acontecimiento imposible y la probabilidad de una llamada durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt puede considerarse como una infinitesimal de orden dt.

Para aplicar la fórmula (2.6.13), es necesario calcular el número medio de llamadas en el transcurso del intervalo de tiempo (t_1, t_2). Es evidente que este número es igual a

$$\lambda = \int_{t_1}^{t_2} \nu(t)\,dt.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (2.6.13), hallaremos la probabilidad buscada de que se reciban m llamadas durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2):

$$p_m = \frac{1}{m!}\left(\int_{t_1}^{t_2} \nu(t)\,dt\right)^m \exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2} \nu(t)\,dt\right\}.$$

En conclusión observemos que muchos otros problemas de la práctica también llevan a la ley de Poisson. Así, por ejemplo, si ciertos puntos se reparten aleatoriamente por cierta parte de un plano o del espacio de modo que se cumplen las tres condiciones a las cuales debe satisfacer el flujo de acontecimientos, entonces el número de puntos que se encuentran en cualquier zona del plano (del espacio) representa una magnitud aleatoria repartida según la ley de Poisson. En este caso, la integral de la densidad media de puntos, extendida a la zona dada, representa la esperanza matemática de la cantidad de puntos que van a parar en esta zona.

CAPITULO 3

Magnitudes aleatorias vectoriales

§ 3.1. Función de distribución y densidad de probabilidad de un vector aleatorio

En algunos problemas hay que considerar conjuntamente varias magnitudes aleatorias. El conjunto de cualquier número n de magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es conveniente considerarlo como una sola magnitud aleatoria vectorial n — dimensional X cuyas componentes son las magnitudes $X_1, X_2, \ldots, X_n$. En este caso hay que tener en cuenta que solamente en los casos cuando $n = 2$ y $n = 3$, con la noción de vector se pueden ligar representaciones geométricas directas. Así, por ejemplo, dos magnitudes aleatorias X, Y siempre se pueden considerar como coordenadas cartesianas rectangulares de un punto aleatorio en el plano. El radio vector de este punto con respecto al origen de coordenadas representa un vector aleatorio bidimensional con las componentes X, Y. De modo análogo, tres magnitudes aleatorias se pueden considerar como coordenadas cartesianas rectangulares de un punto aleatorio, en el espacio tridimensional. El vector con más de tres componentes no se puede representar geométricamente de un modo evidente. Por eso el vector aleatorio X con un número de componentes $p > 3$ debe comprenderse simplemente como el conjunto de magnitudes aleatorias escalares que no tienen una representación geométrica directa. Para mayor simplicidad y claridad, nos limitaremos al estudio de los vectores aleatorios bidimensionales. Sin embargo, todas nuestras deducciones se pueden extender fácilmente a los vectores aleatorios con un número cualquiera de componentes.

Se llama *función de distribución* de un vector aleatorio bidimensional con componentes X, Y o *función conjunta de distribución* de dos magnitudes aleatorias X y Y a la probabilidad de que se cumplan conjuntamente las desigualdades $X < x$, $Y < y$, considerada como función de dos variables x, y:

$$F(x, y) = P\begin{pmatrix} X < x \\ Y < y \end{pmatrix}. \tag{3.1.1}$$

Desde el punto de vista geométrico, la función de distribución de un vector aleatorio bidimensional (X, Y) representa la probabilidad de que un punto aleatorio en el plano se encuentre en el cuadrante (cuarta parte del plano), con el vértice en el punto (x, y), dispuesto

a la izquierda y debajo del punto (x, y) (fig. 3.1.1). Conociendo la función de distribución del vector aleatorio $F(x, y)$, se puede calcular la probabilidad de que el punto aleatorio se encuentre en cualesquiera zonas rectangulares.

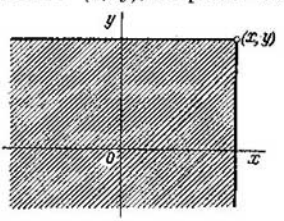


Fig. 3.1.1.

Ejemplo 3.1.1. Es fácil ver que la probabilidad de que el extremo del vector aleatorio (X, Y) se encuentre en la mitad sombreada de la banda, mostrada en la fig. 3.1.2, se expresa mediante la función de distribución por la fórmula

$$P\begin{pmatrix} X \leqslant x \\ \gamma \leqslant Y < \delta \end{pmatrix} = F(x, \delta) - F(x, \gamma). \quad (3.1.2)$$

Ejemplo 3.1.2. El rectángulo mostrado en la fig. 3.1.3 se puede considerar como la diferencia de dos semibandas infinitas del tipo examinado en el ejemplo

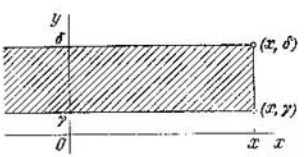


Fig. 3.1.2.

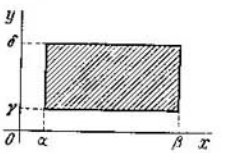


Fig. 3.1.3.

anterior. Por eso, en virtud de la fórmula (3.1.2) la probabilidad de que el punto aleatorio (X, Y) se encuentre en el rectángulo se expresa mediante la función de distribución por la fórmula

$$P\begin{pmatrix} \alpha \leqslant X < \beta \\ \gamma \leqslant Y < \delta \end{pmatrix} = F(\beta, \delta) - F(\beta, \gamma) - F(\alpha, \delta) + F(\alpha, \gamma). \quad (3.1.3)$$

Lo mismo que para una magnitud aleatoria escalar se puede definir *la densidad de la probabilidad* de un vector aleatorio. Se llama *densidad de la probabilidad* de un vector aleatorio (X, Y) o *densidad conjunta de la probabilidad* de dos magnitudes aleatorias X e Y al límite de la relación entre la probabilidad de que su extremo se encuentre en una zona infinitesimal y el área de esta zona al contraer esta última en un punto:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\begin{pmatrix} x \leqslant X < x + \Delta x \\ y \leqslant Y < y + \Delta y \end{pmatrix}}{\Delta x \, \Delta y}. \quad (3.1.4)$$

En virtud de esta definición, la magnitud $f(x, y)\, dx\, dy$ representa, con una exactitud hasta infinitesimales de órdenes superiores, la probabilidad de que un punto aleatorio (X, Y) se encuentre en el rectángulo infinitesimal cuyos vértices se hallan en los puntos (x, y),

$(x+dx,\ y)$, $(x,\ y+dy)$, $(x+dx,\ y+dy)$. Debido a esto, la probabilidad de que un punto aleatorio S con las coordenadas X, Y se encuentre en una zona cualquiera B del plano (fig. 3.1.4) es igual a la integral de la densidad de la probabilidad extendida a la zona B*):

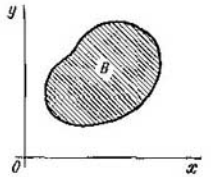


Fig. 3.1.4.

$$P(S \in B) = \iint_B f(x,\ y)\,dx\,dy. \qquad (3.1.5)$$

Puesto que la integral definida no depende de cómo están designadas las variables de integración, la fórmula (3.1.5) puede ser escrita en la forma

$$P(S \in B) = \iint_B f(u,\ v)\,du\,dv. \qquad (3.1.6)$$

La función de distribución del vector aleatorio $(X,\ Y)$ representa la probabilidad de que el punto aleatorio $(X,\ Y)$ se encuentre en el cuadrante con el vértice en el punto $(x,\ y)$ (fig. 3.1.1). Por eso, aplicando la fórmula (3.1.6) podemos expresar la función de distribución del vector aleatorio por medio de la densidad de la probabilidad del mismo:

$$F(x,\ y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,\ v)\,du\,dv. \qquad (3.1.7)$$

De la fórmula (3.1.7) se puede obtener también la correlación inversa, es decir, la expresión de la densidad de la probabilidad del vector aleatorio $(X,\ Y)$ por medio de su función de distribución. Para esto es suficiente derivar la fórmula (3.1.7) una vez con respecto a x y una vez con respecto a y. Entonces, de acuerdo con la regla de la derivación de la integral definida con respecto al límite superior, obtendremos

$$f(x,\ y) = \frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x\,\partial y}. \qquad (3.1.8)$$

Ahora bien, la densidad de la probabilidad de un vector aleatorio bidimensional es igual a la segunda derivada mixta de la función de distribución del mismo.

Examinemos ahora las propiedades fundamentales de la función de distribución y de la densidad de la probabilidad del vector aleatorio. Estas propiedades se semejan, en lo principal, a las de la densidad de la probabilidad y de la función de distribución inherentes a una magnitud aleatoria escalar.

*) El signo $\in$ es el de pertenencia. La notación $S \in B$ significa que el punto S pertenece a la zona B.

En primer lugar, la función de distribución no puede ser mayor que la unidad ni tampoco puede ser negativa:

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1. \tag{3.1.9}$$

En segundo lugar, si el punto (x, y) se traslada hacia arriba o a la derecha, la probabilidad de que el punto aleatorio se encuentre en el cuadrante sombreado de la fig. 3.1.1 no puede disminuir. Así pues, la función de distribución de un vector aleatorio es la función no decreciente de cada una de las variables al tener otra variable un valor fijo.

Más adelante, si $x \to -\infty$, entonces la probabilidad de que se encuentre en el cuadrante con el vértice en el punto (x, y) tiende a cero. Pues bien,

$$F(-\infty, y) = 0 \quad \text{cualquiera que sea el valor de } y, \tag{3.1.10}$$

$$F(x, -\infty) = 3 \quad \text{idem } x \tag{3.1.11}$$

Si $y \to \infty$, entonces el acontecimiento $Y < y$ tiende a un acontecimiento cierto $Y < \infty$ y la probabilidad de que se cumplan conjuntamente las desigualdades $X < x$, $Y < y$ tiende a la probabilidad de que se cumpla la desigualdad $X < x$, es decir, a la función de distribución de la magnitud aleatoria X. Designando esta función de distribución con $F_1(x)$ obtendremos la propiedad siguiente de la función de distribución de un vector aleatorio:

$$F(x, \infty) = P(X < x) = F_1(x). \tag{3.1.12}$$

De modo análogo, designando la función de distribución de una magnitud aleatoria Y con $F_2(y)$, obtendremos

$$F(\infty, y) = P(Y < y) = F_2(y). \tag{3.1.13}$$

Ahora bien, si uno de los argumentos de la función de distribución de un vector aleatorio se toma igual al infinito, obtendremos la función de distribución de la componente del vector aleatorio correspondiente a otro argumento.

Por fin, cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$ el cumplimiento de las desigualdades $X < x$, $Y < y$ tiende a un acontecimiento cierto. Por eso

$$F(\infty, \infty) = 1. \tag{3.1.14}$$

Pasemos ahora al estudio de las propiedades de la densidad de la probabilidad. Directamente de la definición se deduce que la densidad de la probabilidad de un vector aleatorio no puede ser negativa:

$$f(x, y) \geqslant 0. \tag{3.1.15}$$

Luego, en el haciendo en (3.1.7) $x = y = \infty$, teniendo en cuenta (3.1.14) y el hecho de que la integral definida no depende de la desig-

nación de las variables de integración, obtendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1. \tag{3.1.16}$$

Esta fórmula se puede obtener también aplicando la fórmula (3.1.5) a todo el plano y teniendo en consideración que el hecho de que el punto aleatorio vaya a parar en cualquier punto del plano, indiferentemente de en cuál precisamente, representa un acontecimiento cierto.

Suponiendo que en la fórmula (3.1.7) $y = \infty$, teniendo en consideración (3.1.12) y sustituyendo la variable de integración v por y, obtendremos

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)\,dy. \tag{3.1.17}$$

Al derivar esta fórmula con respecto a x, obtendremos la expresión de la densidad de la probabilidad $f_1(x)$ de una magnitud aleatoria X por medio de la densidad conjunta de la probabilidad de las magnitudes aleatorias X e Y:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy. \tag{3.1.18}$$

De modo semejante expresemos la densidad de la probabilidad de la magnitud aleatoria Y por medio de la densidad conjunta de la probabilidad de las magnitudes aleatorias X e Y:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx. \tag{3.1.19}$$

Por consiguiente, para hallar la densidad de la probabilidad de una componente del vector aleatorio, conviene integrar la densidad de la probabilidad del mismo respecto a la variable correspondiente a la otra componente.

Ejemplo 3.1.3. El vector aleatorio con las componentes X, Y está repartido uniformemente dentro de un rectángulo:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/4\,ab & \text{si } |x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \\ 0 & \text{si } |x| > a \text{ o } |y| > b. \end{cases} \tag{3.1.20}$$

Hallar la función de distribución del vector aleatorio y las densidades de la probabilidad de cada una de las componentes.

Sustituyendo la expresión para la densidad de la probabilidad (3.1.20) en la fórmula (3.1.7), obtendremos

$$F(x, y) = \begin{cases} (x + a)(y + b)/4ab & \text{si } |x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \\ (x + a)/2a & \text{si } |x| < a, \quad y > b, \\ (y + b)/2b & \text{si } x > a, \quad |y| < b, \\ 0 & \text{si } x < -a, \quad y < -b, \\ 1 & \text{si } x > a, \quad y > b. \end{cases} \tag{3.1.21}$$

Por las fórmulas (3.1.18) y (3.1.19) hallamos las densidades de las probabilidades $f_1(x)$, $f_2(y)$ de las componentes X, Y:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/2a & \text{si } |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{si } |x| > a, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1/2b & \text{si } |y| \leqslant b, \\ 0 & \text{si } |y| > b. \end{cases} \tag{3.1.22}$$

Vemos que cada una de las componentes del vector aleatorio, repartido uniformemente en el rectángulo, también se halla distribuida uniformemente en el segmento correspondiente.

Ejemplo 3.1.4. El vector aleatorio con las componentes X, Y está repartido uniformemente dentro de una elipse:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi ab} & \text{si } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases} \tag{3.1.23}$$

Hallar las densidades de la probabilidad de las componentes del vector aleatorio. Sustituyendo la expresión (3.1.23) en las fórmulas (3.1.18) y (3.1.19), hallamos

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \frac{1}{\pi ab} \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy = \frac{2}{\pi a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Así pues,

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi a}\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} & \text{si } |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases} \tag{3.1.24}$$

De modo semejante se puede hallar la densidad de la probabilidad $f_2(y)$:

$$f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi b}\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{b}\right)^2} & \text{si } |y| \leqslant b, \\ 0 & \text{si } |y| > b. \end{cases} \tag{3.1.25}$$

Vemos que, a distinción del ejemplo anterior, cada una de las componentes del vector aleatorio, repartido uniformemente dentro de la elipse, no está subordinada a la ley de distribución uniforme.

De un modo completamente análogo se determinan la función de distribución y la densidad de la probabilidad de un vector aleatorio n-dimensional X cuyas componentes son magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$. Se llama *función de distribución* del vector aleatorio X a la probabilidad de que se cumplan conjuntamente las desigualdades $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, $\ldots$, $X_n < x_n$, considerada dicha proba-

bilidad como función de las variables $x_1, \ldots, x_n$:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P\left(\begin{matrix} X_i < x_i \\ i = 1, \ldots, n \end{matrix}\right). \qquad (3.1.26)$$

Se denomina *densidad de la probabilidad* del vector aleatorio X al límite de la relación de la probabilidad de que el vector se encuentre en una zona infinitesimal, a la magnitud de esta zona al contraerla en el punto:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1, \ldots, n}} \frac{P\left(\begin{matrix} x_i \leqslant X_i < x_i + \Delta x_i \\ i = 1, \ldots n \end{matrix}\right)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n}. \qquad (3.1.27)$$

Todas las propiedades de la función de distribución y de la densidad de la probabilidad, deducidas anteriormente para los vectores aleatorios bidimensionales, se extienden fácilmente a los vectores de un número cualquiera de dimensiones.

Enumeremos estas propiedades sin deducirlas.

La función de distribución de un vector aleatorio no es negativa y no puede ser mayor que la unidad.

Si por lo menos una de las variables x_i toma el valor $-\infty$, la función de distribución es igual a cero.

Si cualesquiera m de las variables $x_1, \ldots, x_n$ toman el valor de ∞, la función de distribución del vector aleatorio n-dimensional se hace igual a la función de distribución del correspondiente vector aleatorio $n - m$-dimensional.

Si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \infty$, la función de distribución es igual a la unidad.

La función de distribución es la función no decreciente de cada uno de los argumentos.

La función de distribución y la densidad de la probabilidad están ligadas por las relaciones

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n. \qquad (3.1.28)$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}. \qquad (3.1.29)$$

La densidad de la probabilidad de un vector aleatorio no es negativa, y la integral de la misma, por toda la zona de valores posibles de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$, es igual a la unidad.

Si se integra la densidad de la probabilidad de un vector aleatorio n-dimensional con respecto a cualesquiera m de las variables $x_1, \ldots, x_n$, como resultado se obtendrá la densidad de la probabilidad del vector n — m-dimensional formado por las componentes correspondientes a las demás variables.

Ejemplo 3.1.5. Se conoce la densidad de la probabilidad $f(x, y, z)$ de un vector aleatorio tridimensional con las componentes X, Y, Z. Hallar las densidades de la probabilidad $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ de las componentes X, Y, Z por separado y las densidades de la probabilidad $f_{12}(x, y)$, $f_{13}(x, z)$, $f_{23}(y, z)$ de los vectores bidimensionales (X, Y), (X, Z), (Y, Z), obtenidas al proyectar el vector aleatorio (X, Y, Z) sobre los planos Oxy, Oxz, Oyz respectivamente.

En virtud de la última propiedad de la densidad de la probabilidad tenemos que

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dy\,dz, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dx\,dz, \\ &f_3(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dx\,dy, \\ &f_{12}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dz, \quad f_{13}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dy, \\ &f_{23}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.30}$$

Ejemplo 3.1.6. La probabilidad de que un punto aleatorio con las coordenadas (X, Y, Z) se encuentre en la zona dada B del espacio tridimensional se determina por la fórmula

$$P(S \in B) = \iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{3.1.31}$$

§ 3.2. Funciones condicionales de distribución y densidades condicionales de la probabilidad

En la práctica surge con frecuencia la necesidad de hallar la ley de distribución de una magnitud aleatoria X a condición de que otra magnitud aleatoria Y tome el valor comprendido en los límites dados $y_1 \leqslant Y < y_2$. De acuerdo con esto se determina la función condicional de distribución de la magnitud aleatoria X respecto al acontecimiento $y_1 \leqslant Y < y_2$:

$$F(x \mid y_1, y_2) = P(X < x \mid y_1 \leqslant Y < y_2). \tag{3.2.1}$$

Ahora bien, la función de distribución de la magnitud aleatoria X con respecto al acontecimiento $y_1 \leqslant Y < y_2$ representa la probabilidad condicional de la desigualdad $X < x$ con respecto al acontecimiento que consiste en el cumplimiento de la desigualdad $y_1 \leqslant Y < y_2$. Lo mismo que toda probabilidad condicional, esta probabilidad se determina por la fórmula (1.3.6). Tomando en esta fórmula por acontecimiento A el cumplimiento de la desigualdad $X < x$ y por el acontecimiento B, el cumplimiento de la desigualdad $y_1 \leqslant Y <$

$< y_2$, obtendremos la siguiente expresión para la función condicional de distribución de la magnitud aleatoria X:

$$F_1(x \mid y_1, y_2) = \frac{P\begin{pmatrix} X < x \\ y_1 \leqslant Y < y_2 \end{pmatrix}}{P(y_1 \leqslant Y < y_2)}. \tag{3.2.2}$$

Ambas probabilidades en esta fórmula se pueden expresar por medio de la densidad de la probabilidad del vector aleatorio (X, Y). El cumplimiento conjunto de las desigualdades $y_1 \leqslant Y < y_2$ y $X < x$ corresponde al hecho de que el punto aleatorio (X, Y) se encuentre en la mitad de la banda mostrada en la fig. 3.2.1. Por eso valiéndonos de la fórmula (3.1.6), hallamos

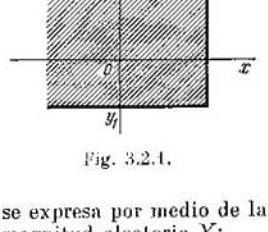


Fig. 3.2.1.

$$P\begin{pmatrix} X < x \\ y_1 \leqslant Y < y_2 \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{x} \int_{y_1}^{y_2} f(u, v)\, du\, dv. \tag{3.2.3}$$

La probabilidad en el denominador del segundo miembro de la fórmula (3.2.2) se expresa por medio de la densidad de la probabilidad de una sola magnitud aleatoria Y:

$$P(y_1 \leqslant Y < y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f_2(y)\, dy. \tag{3.2.4}$$

Sustituyendo las expresiones (3.2.3) y (3.2.4) en la fórmula (3.2.2), obtendremos

$$F_1(x \mid y_1, y_2) = \frac{\int_{-\infty}^{x} du \int_{y_1}^{y_2} f(u, v)\, dv}{\int_{y_1}^{y_2} f_2(y)\, dy}. \tag{3.2.5}$$

Derivando esta fórmula con respecto a x, se puede hallar *la densidad condicional* de la probabilidad de la magnitud aleatoria X a condición de que la magnitud aleatoria Y tome el valor comprendido en los límites $y_1 \leqslant Y < y_2$:

$$f_1(x \mid y_1, y_2) = \frac{\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy}{\int_{y_1}^{y_2} f_2(y)\, dy}. \tag{3.2.6}$$

En esta fórmula hemos sustituido en el numerador la designación de la variable de integración v por y.

De todas las leyes condicionales de distribución de la magnitud aleatoria X, correspondientes a distintos valores de y_1 y y_2, la ley de distribución de dicha magnitud a condición de que la magnitud Y tome un valor determinado de y es la que tiene mayor importancia práctica. Para abreviar, llamaremos a esta ley sencillamente *ley condicional de distribución* de la magnitud aleatoria X para el valor dado y de la magnitud aleatoria Y. Para hallar esta ley condicional de distribución se puede hacer en las fórmulas (3.2.5) y (3.2.6) $y_1 = y$, $y_2 = y + \Delta y$ y pasar al límite cuando $\Delta y \to 0$. Suponiendo en la fórmula (3.2.6) $y_1 = y$, $y_2 = y + \Delta y$, considerando las funciones $f(x, y)$ y $f_2(y)$ continuas con respecto a y en el intervalo $(y, y + \Delta y)$ y aplicando a las integrales en el numerador y el denominador el teorema de la media, obtendremos, después de reducir en Δy,

$$f(x \mid y, y + \Delta y) = \frac{f(x, y + \theta \Delta y)}{f_2(y + \theta_1 \Delta y)}, \qquad (3.2.7)$$

donde θ y θ_1 son ciertos números comprendidos entre el cero y la unidad. Pasemos ahora al límite cuando $\Delta y \to 0$. En este caso, para simplificar, omitamos la segunda letra y y designemos por $f_1(x \mid y)$ la densidad condicional de la probabilidad de la magnitud aleatoria X con respecto a la magnitud aleatoria Y. Entonces obtendremos

$$f_1(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \qquad (3.2.8)$$

De modo semejante obtendremos la fórmula para la densidad condicional de la probabilidad de la magnitud aleatoria Y con respecto a la magnitud X:

$$f_2(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}. \qquad (3.2.9)$$

Las igualdades (3.2.8) y (3.2.9) se pueden escribir en la forma

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y \mid x) = f_2(y) f_1(x \mid y). \qquad (3.2.10)$$

Esta fórmula expresa el teorema de multiplicación de las densidades de la probabilidad: la densidad conjunta de la probabilidad de dos magnitudes aleatorias es igual a la densidad de la probabilidad de una de ellas multiplicada por la densidad condicional de la otra con respecto a la primera.

Las magnitudes aleatorias X y Y se llaman *dependientes*, si los acontecimientos que consisten en el cumplimiento de las desigualdades $X < x$ y $Y < y$ son dependientes por lo menos para un par de valores de x y y. Las magnitudes aleatorias X, Y se llaman *independientes*, si los acontecimientos que consisten en el cumplimiento de las desigualdades $X < x$ y $Y < y$ son independientes

para cualesquiera valores de x, y. En lo que se refiere a las magnitudes aleatorias independientes X, Y, la función conjunta de distribución $F(x, y)$, en virtud del teorema de multiplicación de las probabilidades para los acontecimientos independientes, es igual a

$$F(x, y) = P\begin{pmatrix} X < x \\ Y < y \end{pmatrix} = P(X < x)\, P(Y < y). \qquad (3.2.11)$$

Pero el primer factor en el segundo miembro es la función de distribución $F_1(x)$ de la magnitud aleatoria X y el segundo, la función de distribución $F_2(y)$ de la magnitud aleatoria Y. Por consiguiente,

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y). \qquad (3.2.12)$$

Así pues, la función conjunta de distribución de las magnitudes aleatorias X e Y es igual al producto de las funciones de distribución de las mismas. Esta condición es necesaria y suficiente para la independencia de las magnitudes aleatorias X, Y. Esta condición debe cumplirse idénticamente, es decir, para cualesquiera valores de x e y. De ella se puede obtener la identidad análoga para las densidades de la probabilidad. Derivando la identidad (3.2.12) una vez con respecto a x y una vez con respecto a y, obtendremos

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y). \qquad (3.2.13)$$

Ahora bien, la densidad conjunta de la probabilidad de las magnitudes aleatorias independientes es igual al producto de las densidades de la probabilidad de las mismas. Esta condición es también necesaria y suficiente para que las magnitudes aleatorias X, Y sean independientes.

Comparando (3.2.13) con (3.2.10) llegamos a la conclusión de que para las magnitudes aleatorias independientes X, Y

$$f_1(x \mid y) = f_1(x),\ f_2(y \mid x) = f_2(y). \qquad (3.2.14)$$

Así pues, para las magnitudes aleatorias independientes sus densidades condicionales de la probabilidad coinciden con las incondicionales. Esto concuerda completamente con nuestras ideas intuitivas acerca de la dependencia y la independencia de las magnitudes aleatorias: si llega a ser conocido el valor de una de las magnitudes aleatorias, mientras que la ley de distribución de la otra magnitud no varía, entonces las magnitudes aleatorias son independientes. Así pues, las igualdades (3.2.14) reflejan el hecho intuitivamente comprendido de que las magnitudes aleatorias son independientes entonces, y solamente entonces, cuando el conocimiento del valor de una de ellas no varía la ley de distribución de la otra. Con otras palabras, la información que obtenemos fijando el valor de una de las magnitudes aleatorias no contiene ninguna noticia acerca de la segunda magnitud aleatoria.

Ejemplo 3.2.1. Hallar las densidades condicionales de la probabilidad de las componentes de un vector aleatorio uniformemente repartido dentro del rectángulo $|x| < a$, $|y| < b$.

Usando los resultados del ejemplo 3.1.3, por las fórmulas (3.2.8) y (3.2.9) hallamos

$$f_1(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} 1/2a & \text{si } |x| < a, \ |y| < b, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant a, \ |y| \geqslant b, \end{cases} \tag{3.2.15}$$

$$f_2(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } |x| < a, \ |y| < b, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant a, \ |y| \geqslant b. \end{cases} \tag{3.2.16}$$

Es evidente que las componentes del vector aleatorio son independientes, puesto que sus densidades condicionales de la probabilidad coinciden con las incondicionales.

Ejemplo 3.2.2. Hallar las densidades condicionales de la probabilidad de un vector aleatorio repartido uniformemente dentro de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Sustituyendo en las fórmulas (3.2.8) y (3.2.9) las expresiones (3.1.23), (3.1.24) y (3.1.25), obtenemos

$$f_1(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{1-(y/b)^2}} & \text{si } |x| < a\sqrt{1-(y/b)^2}, \\ 0 & \text{si } |x| > a\sqrt{1-(y/b)^2}. \end{cases} \tag{3.2.17}$$

$$f_2(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2b\sqrt{1-(x/a)^2}} & \text{si } |y| < b\sqrt{1-(x/a)^2}, \\ 0 & \text{si } |y| > b\sqrt{1-(x/a)^2}. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

A diferencia del ejemplo 3.2.1, las componentes del vector aleatorio uniformemente repartido dentro de la elipse son dependientes.

De modo completamente semejante se determinan las funciones condicionales de distribución y las densidades de la probabilidad de los vectores aleatorios. Como resultado obtendremos fórmulas absolutamente idénticas a las deducidas para las magnitudes aleatorias escalares X, Y.

En particular, obtendremos el teorema de multiplicación de las densidades de la probabilidad de los vectores aleatorios: la densidad de la probabilidad del vector aleatorio $n+m$-dimensional obtenido por medio de la unión del vector aleatorio n-dimensional X $(X_1, \ldots, X_n)$ y del vector aleatorio m-dimensional Y $(Y_1, \ldots, Y_m)$ es igual al producto de la densidad de la probabilidad de uno de ellos por la densidad condicional de la probabilidad del otro:

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f_1(x_1, \ldots x_n) f_2(y_1, \ldots \ldots, y_m \mid x_1, \ldots, x_n) = f_2(y_1, \ldots, y_m) f_1(x_1, \ldots, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots y_m). \tag{3.2.19}$$

Es evidente que si se designa el conjunto de las variables $x_1, \ldots \ldots, x_n$ por una sola letra x y el conjunto de las variables $y_1, \ldots \ldots, y_m$, por una sola letra y, entonces la fórmula (3.2.19) tomará la forma de (3.2.10). Pues bien, la fórmula (3.2.10) es válida tam-

bién para las magnitudes aleatorias vectoriales X, Y, si por x, y se entienden las variables vectoriales correspondientes. En el párrafo anterior vimos que también las fórmulas (3.1.18) y (3.1.19) son válidas para las magnitudes aleatorias vectoriales X, Y, si por x, y se entienden las variables vectoriales correspondientes y las integrales se entienden como integrales múltiples de las multiplicidades correspondientes.

Dos vectores aleatorios X, Y se llaman independientes, si el acontecimiento A que consiste en el cumplimiento conjunto de todas las desigualdades $X_i < x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ y el acontecimiento B que consiste en el cumplimiento conjunto de todas las desigualdades $Y_j < y_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ son independientes para todos los valores de las variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. Si estos acontecimientos son dependientes por lo menos para un conjunto de valores de las variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, los vectores aleatorios X, Y son dependientes. De condición necesaria y suficiente para que los vectores aleatorios X y Y sean independientes sirve la igualdad idéntica de su función conjunta de distribución (o de la densidad de la probabilidad) al producto de sus funciones de distribución (de las densidades de la probabilidad, respectivamente) o la igualdad idéntica de sus densidades condicionales de la probabilidad a las incondicionales. Ahora bien, cada una de las identidades (3.2.12), (3.2.13) y (3.2.14) es la condición necesaria y suficiente para que los vectores X, Y sean independientes, si por x, y se entienden las variables vectoriales correspondientes.

Apliquemos ahora el teorema de multiplicación de las densidades de la probabilidad a un vector $n-1$-dimensional X con las componentes $X_1, \ldots, X_{n-1}$ y a un vector unidimensional (es decir, al escalar) $Y = X_n$. Luego apliquemos el mismo teorema al vector $n-2$-dimensional $(X_1, \ldots, X_{n-2})$ y al escalar $Y = X_{n-1}$. Procediendo de tal modo también en lo sucesivo, obtendremos la siguiente fórmula general para la densidad conjunta de la probabilidad de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2 \mid x_1) f_3(x_3 \mid x_1, x_2) \cdot \ldots \cdot \ldots f_n(x_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}). \quad (3.2.20)$$

Las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ se llaman *independientes* si dos vectores cualesquiera, que se pueden formar de estas magnitudes aleatorias y que no contienen componentes comunes, son independientes. Con otras palabras, las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ son independientes cuando, y solamente cuando, cada magnitud X_i es independiente de las demás magnitudes $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ tomadas por separado, dos a dos, tres a tres, etc.

Cada vector bidimensional (X_i, X_j) es independiente de las demás magnitudes tomadas por separado, dos a dos, tres a tres, etc.

De la fórmula general (3.2.20) se deduce que la densidad conjunta de la probabilidad de las magnitudes aleatorias independientes es igual al producto de sus densidades de la probabilidad

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n). \qquad (3.2.21)$$

Esta condición es necesaria y suficiente para que las magnitudes $X_1, \ldots, X_n$ sean independientes.

Ejemplo 3.2.3. Supongamos que un receptor recibe un tren de impulsos con las amplitudes aleatorias $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. Cada impulso Z_i representa la suma de un impulso de señal útil S_i y de un impulso del ruido X_i:

$$Z_i = S_i + X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La misión del detector consiste en revelar la señal útil, es decir, en resolver el problema: contienen o no los impulsos recibidos una señal útil (información útil) o no son más que impulsos de ruido.

Este problema tiene gran importancia para la recepción a larga distancia, ya que en este caso los impulsos de señal útil son comparables, en lo que toca a su magnitud, con los de ruido y a veces son considerablemente menores que el nivel del ruido.

El principio de funcionamiento del detector consiste en que éste deja pasar la señal si $\varphi(Z) > c$ y no la deja pasar si $\varphi(Z) \leqslant c$, donde $\varphi(Z)$ es cierta función de los impulsos recibidos formada por el detector y c es cierto nivel de umbral. Con otras palabras, si $\varphi(Z) > c$, el detector determina que hay señal y si $\varphi(Z) \leqslant c$, el detector determina que no hay señal.

Es necesario determinar:

a) la probabilidad de que tenga lugar una revelación correcta al emplear el método dado de tratamiento de la señal que se recibe, es decir, para la función φ y el nivel de umbral c dados;

b) las probabilidades condicionales de que se cometan errores de dos tipos:

1) la probabilidad de que la señal se pierda cuando existe en los impulsos recibidos;

2) la probabilidad de alarma falsa, es decir, la probabilidad de que se decida que hay señal útil cuando ésta no existe.

Para que la solución resulte ser más clara y simple, supongamos que los impulsos de señal útil son magnitudes conocidas $s_1^0, \ldots, s_n^0$ y lo que se desconoce es solamente el propio hecho de si existen o no*) en la señal recibida $Z_1, \ldots, Z_n$. Supongamos también que conocemos la ley de distribución de los ruidos, es decir, conocemos la densidad de probabilidad de los impulsos parásitos $f(x)$. Y, por fin, supongamos que es conocida la probabilidad aprioristica de la presencia de la señal p y, por consiguiente, también la probabilidad de la ausencia de la señal $q = 1 - p$.

Primeramente calculemos las probabilidades condicionales de que se cometan errores de dos tipos, es decir, la probabilidad de pérdida de la señal cuando ésta existe y la probabilidad de alarma falsa cuando la señal no existe. Para esto hallemos la densidad condicional de probabilidad de los impulsos recibidos con respecto a la señal útil $f_1(z \mid s)$. Puesto que, de acuerdo con la condición admitida la señal útil s tiene solamente dos valores posibles: s^0 (es decir, el vector con las componentes $s_1^0, \ldots, s_n^0$) y 0 (es decir, el vector cuyas componentes son todas iguales a cero), es suficiente hallar la densidad de probabilidad de la señal recibida cuando está presente la señal útil $f_1(z \mid s^0)$ y la densidad de la probabilidad de la señal recibida cuando falta la señal útil $f_1(z \mid 0)$. Es evidente que dado que

*) Esta suposición no es de importancia. La solución del problema sobre la revelación óptima de una señal, que se da en este ejemplo, se extiende, sin cambios de principio, a un caso más general.

al faltar la señal útil se recibe solamente ruido, la densidad condicional de probabilidad de la señal que se recibe, cuando no está presente la señal útil, coincide con la densidad de probabilidad del ruido

$$f_1(z \mid 0) = f(z). \tag{3.2.22}$$

En caso de que esté presente la señal útil, se le adjunta el ruido. Por eso la densidad condicional de probabilidad de la señal que se recibe, cuando se tiene la señal útil, se obtiene de la densidad de probabilidad del ruido $f(x)$ sustituyendo en ella el argumento x por la diferencia entre el valor posible de la señal recibida z y el valor de la señal útil s^0:

$$f_1(z \mid s^0) = f(z - s^0). \tag{3.2.23}$$

Para mayor claridad, en la fig. 3.2.2 se muestra la dispersión de las realizaciones de la señal que se recibe, al faltar la señal útil, y la elipse de dispersión de la

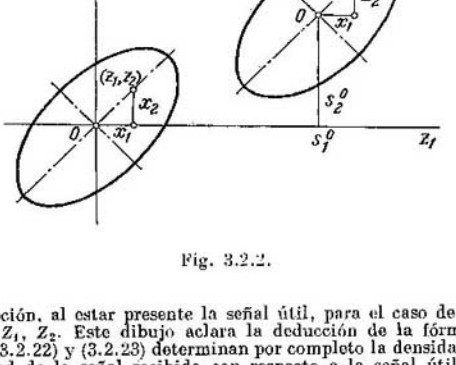


Fig. 3.2.2.

señal en recepción, al estar presente la señal útil, para el caso de recepción de dos impulsos Z_1, Z_2. Este dibujo aclara la deducción de la fórmula (3.2.23). Las fórmulas (3.2.22) y (3.2.23) determinan por completo la densidad condicional de probabilidad de la señal recibida con respecto a la señal útil.

La pérdida de la señal se caracteriza por el hecho de que, al estar presente la señal, la función $\varphi(Z)$, debido al efecto de los parásitos, resulta ser menor que el nivel de umbral c o igual a este último. Por lo tanto, la probabilidad condicional de la pérdida de la señal, es decir, la probabilidad de la desigualdad $\varphi(Z) \leqslant c$ es igual, al tenerse la señal útil, a la integral de la densidad condicional de probabilidad (3.2.23), extendida a la zona determinada por la desigualdad $\varphi(Z) \leqslant c$:

$$p_{\text{per.}} = P(\varphi(z) \leqslant c \mid S = s^0) = \int\limits_{\varphi(z) \leqslant c} f(z - s^0)\, dz. \tag{3.2.24}$$

La alarma falsa se caracteriza por el hecho de que, al estar ausente la señal útil, la función $\varphi(Z)$ resulta, debido al efecto del ruido, mayor que el nivel de umbral c. Por lo tanto la probabilidad condicional de alarma falsa, es decir, la probabilidad de la desigualdad $\varphi(Z) > c$, al estar ausente la señal útil, es igual a la integral de la densidad condicional de probabilidad (3.2.22) extendida

a la zona determinada por la desigualdad $\varphi(z) > c$:

$$p_{a.t} = P(\varphi(z) > c \mid S = 0) = \int\limits_{\varphi(z)>c} f(z)\, dz. \tag{3.2.25}$$

Pasemos ahora al cálculo de la probabilidad de que se cometa un error al resolver el problema de la revelación de las señales. Para esto apliquemos la fórmula de la probabilidad completa. El detector puede tomar una decisión falsa cuando hay una de dos hipótesis que forman un grupo completo de acontecimientos incompatibles: la hipótesis E_1 consiste en que la señal útil está presente; su probabilidad es igual a p; la hipótesis E_2 consiste en que la señal útil está ausente; su probabilidad es igual a $q = 1 - p$. Las probabilidades condicionales de un error, teniendo estas dos hipótesis, se determinan por las fórmulas (3.2.24) y (3.2.25). Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de la probabilidad completa, para la probabilidad de que se cometa un error obtendremos la expresión

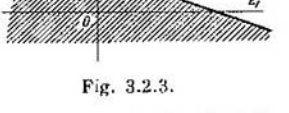


Fig. 3.2.3.

$$p_{err.} = pP(\varphi(Z) \leqslant c \mid S = s^0) + qP(\varphi(Z) > c \mid S = 0) =$$
$$= p \int\limits_{\varphi(z)\leqslant c} f(z - s^0)\, dz + q \int\limits_{\varphi(z)>c} f(z)\, dz. \tag{3.2.26}$$

La probabilidad de que el problema de la revelación se resuelva correctamente se determinará como la probabilidad de que se produzca el acontecimiento contrario

$$p_{s.\,corr.} = 1 - p_{err.} \tag{3.2.27}$$

Para hacer cálculos completos, examinemos un caso más concreto de la recepción de dos impulsos, suponiendo que los impulsos de ruido sean magnitudes aleatorias independientes, normalmente distribuidas, con iguales dispersiones D y esperanzas matemáticas iguales a cero. En calidad de función $\varphi(z)$ tomemos la función lineal

$$\varphi(z_1, z_2) = az_1 + bz_2.$$

En este caso la fórmula (3.2.24) toma la forma

$$p_{per.} = P(\varphi(Z) \leqslant c \mid S = s^0) = \iint\limits_{az_1+bz_2\leqslant c} \frac{1}{2\pi D}\, e^{-\frac{(z_1-s_1^0)^2+(z_2-s_2^0)^2}{2D}}\, dz_1\, dz_2.$$

La zona de integración se muestra en la fig. 3.2.3. Para calcular la integral, sustituyamos las variables de tal modo que en las nuevas variables u_1, u_2 la zona de integración se limite solamente respecto a una de las variables, digamos con respecto a u_1 mientras que respecto a u_2 se extienda de $-\infty$ hasta $+\infty$. Es fácil comprender que para esto basta dirigir el eje u_1 perpendicularmente a la recta $az_1 + bz_2 \leqslant c$ y el eje u_2 paralelamente a esta recta. Entonces, como es fácil de suponer, las nuevas variables u_1 y u_2 se determinarán por las fórmulas (la escala de las nuevas variables no tiene importancia)

$$u_1 = az_1 + bz_2,$$
$$u_2 = bz_1 + az_2.$$

Despejando z_1 y z_2 en estas ecuaciones, obtendremos

$$z_1 = \frac{au_1 + bu_2}{a^2 + b^2},$$

$$z_2 = \frac{bu_1 - au_2}{a^2 + b^2}.$$

El Jacobiano de esta transformación es igual a

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial z_1}{\partial u_1} & \frac{\partial z_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial u_1} & \frac{\partial z_2}{\partial u_2} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{a^2+b^2}.$$

Con tal sustitución de las variables, los límites de integración se determinarán por la desigualdad $u_1 \leqslant c$, es decir, la integración se efectuará de $-\infty$ hasta c con respecto a u_1 y de $-\infty$ hasta $+\infty$ con respecto a u_2. Como resultado, la fórmula para la probabilidad condicional de pérdida de la señal tomará la forma

$$P(\varphi(Z) \leqslant c \mid S = s^0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi D(a^2+b^2)} \int_{-\infty}^{c} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u_1 - as_1^0 - bs_2^0)^2 + (u_2 - bs_1^0 + as_2^0)^2}{2D(a^2+b^2)}} du_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi D(a^2+b^2)}} \int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{(u_1 - as_1^0 - bs_2^0)^2}{2D(a^2+b^2)}} du_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{c - as_1^0 - bs_2^0}{\sqrt{D(a^2+b^2)}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{c - as_1^0 - bs_2^0}{\sqrt{D(a^2+b^2)}} \right), \quad (3.2.28)$$

donde $\Phi(u)$ es la función de Laplace.

De modo semejante hallaremos la probabilidad de alarma falsa al estar ausente la señal útil:

$$p_{\text{a.f.}} = P(\varphi(Z) > c \mid S = 0) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{D(a^2+b^2)}} \right). \quad (3.2.29)$$

Ejemplo 3.2.4. En las condiciones del ejemplo anterior hallar el procedimiento óptimo de tratamiento de la señal recibida por el detector, que asegure la probabilidad mínima de que se cometa un error y, por consiguiente, la probabilidad máxima de una resolución correcta. Con otras palabras, hallar la función φ y el nivel de umbral c a condición de que se garantice la probabilidad mínima de un error.

Para resolver este problema, aprovecharemos el hecho de que

$$\int_{\varphi(z) \leqslant c} f(z - s^0)\, dz + \int_{\varphi(z) > c} f(z - s^0)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - s^0)\, dz = 1,$$

y escribiremos la fórmula (3.2.26) en la forma

$$p_{\text{err.}} = p - \int_{\varphi(z) > c} [pf(z - s^0) - qf(z)]\, dz. \quad (3.2.30)$$

De aquí está claro que la probabilidad de un error p_{err} tiene el valor mínimo cuando la integral es máxima. Por lo tanto, el problema se reduce a la elección de la función $\varphi(z)$ y la magnitud c de modo tal, que la integral en (3.2.30) tenga el mayor valor posible. Es evidente que esta integral aumenta al añadir a la zona de integración tales partes del espacio del vector z en las cuales la función subintegral es positiva, y disminuye al añadir a la zona de integración tales partes del espacio en las que la función subintegral es negativa. Por consiguiente, esta integral tiene el valor máximo en el caso en que la zona de integración coincide con aquella zona del espacio del vector z en la cual la función subintegral es positiva, es decir, cuando la desigualdad

$$\varphi(z) > c \tag{3.2.31}$$

equivale a la desigualdad $pf(z - s^0) - qf(z) > 0$ o bien

$$\frac{f(z-s^0)}{f(z)} > \frac{q}{p}. \tag{3.2.32}$$

Supongamos ahora que $\theta(\lambda)$ es una función arbitraria, rigurosamente creciente. Entonces de (3.2.32) se deriva que

$$\theta\left(\frac{f(z-s^0)}{f(z)}\right) > \theta\left(\frac{q}{p}\right). \tag{3.2.33}$$

Comparando esta desigualdad con (3.2.31), vemos que la función $\varphi(z)$ y el umbral c se pueden determinar por las fórmulas

$$\varphi(z) = \theta\left(\frac{f(z-s^0)}{f(z)}\right), \quad c = \theta\left(\frac{q}{p}\right). \tag{3.2.34}$$

En este caso la desigualdad (3.2.31) será equivalente a la desigualdad (3.2.32) y la probabilidad de una resolución errónea p_{err} tendrá el valor mínimo.

Vemos que la solución del problema de la revelación óptima de la señal en su esencia no es unívoca, puesto que la función creciente $\theta(\lambda)$ se puede elegir arbitrariamente. Frecuentemente en los problemas prácticos resulta conveniente tomar en calidad de función $\theta(\lambda)$ el logaritmo natural $\ln\lambda$. En este caso la función $\varphi(z)$ y el nivel de umbral c se determinan por las fórmulas

$$\varphi(z) = \ln\frac{f(z-s^0)}{f(z)} \qquad c = \ln\frac{q}{p}. \tag{3.2.35}$$

En el caso particular cuando se trata de impulsos de ruido independientes normalmente repartidos con esperanzas matemáticas iguales a cero e iguales dispersiones D,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n D^n} \exp\left\{\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}$$

y la primera fórmula de (3.2.35) toma la forma

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n}[(z_i - s_i^0)^2 - z_i^0] = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} s_i^0 z_i - \frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n}(s_i^0)^2. \tag{3.2.36}$$

Pues bien, en este caso la función óptima $\varphi(z)$ es función lineal de los impulsos recibidos, es decir, el detector óptimo es un sistema lineal. El mismo resultado se obtendrá en el caso de un ruido arbitrario normalmente repartido.

La relación de las densidades condicionales de probabilidad de la señal que se recibe al estar presente la señal útil y al estar ésta ausente se llama *relación de verosimilitud*. Así pues, el sistema de revelación óptima debe calcular la relación de verosimilitud o cualquier función creciente de esta relación y

compararla con el umbral c. Para determinar el umbral por la segunda fórmula (3.2.34), es necesario conocer la probabilidad de presencia de la señal útil s^0 en la señal recibida z. Sin embargo, en la práctica esta probabilidad es de ordinario desconocida. Por eso el problema de revelación se resuelve frecuentemente por otro procedimiento, a saber, partiendo de la condición de probabilidad mínima de pérdida de la señal $p_{\text{per.}}$ dada la probabilidad de alarma falsa $p_{\text{a.f}} = \alpha$.

Para hallar la función óptima $\varphi(z)$ y el umbral c con los cuales la probabilidad de pérdida de la señal es mínima y la probabilidad de alarma falsa tiene el valor dado α, se puede aplicar el método de multiplicadores indefinidos de Lagrange. Entonces el problema se reduce a la determinación de la función $\varphi(z)$ partiendo de la condición de que la magnitud

$$P_1 = p_{\text{per.}} + \lambda p_{\text{a.f}} \quad \text{sea mínima,}$$

donde λ es el multiplicador indefinido que se halla de la condición de que $p_{\text{a.f.}} = \alpha$ después de determinar la función $\varphi(z)$. Este problema se resuelva igual que el de determinación de la función $\varphi(z)$ partiendo de la condición de que la probabilidad completa de errores sea mínima. Como resultado hallaremos

$$\varphi(z) = 0^{\prime}\left(\frac{f(z-s^0)}{f(z)}\right) \qquad c = \theta(\lambda). \tag{3.2.37}$$

La segunda de estas fórmulas determina el umbral c por medio de la magnitud incognita λ que, a su vez, se halla partiendo de la condición de que $p_{\text{a.f.}} = \alpha$. En lugar de esto se puede determinar el umbral c directamente de la condición $p_{\text{a.f.}} = \alpha$ dejando la magnitud λ indeterminada. En efecto, haciendo uso de la fórmula (3.2.25) e igualando la probabilidad de alarma falsa a la magnitud α, obtendremos, para la determinación del umbral c, la ecuación

$$\int\limits_{\varphi(z)>c} f(z)\, dz = \alpha. \tag{3.2.38}$$

En particular, al revelar la señal en dos impulsos independientes normalmente repartidos con esperanzas matemáticas iguales a cero e iguales dispersiones D, para determinar $p_{\text{a.f.}}$ se puede emplear la fórmula (3.2.29) del ejemplo anterior, puesto que la función óptima $\varphi(z)$ según (3.2.36) es en este caso lineal. Comparando la expresión de la función $\varphi(z_1, z_2)$ del ejemplo anterior con (3.2.36), vemos que en el caso en cuestión $a = s_1^0/D$, $b = s_2^0/D$. Sustituyendo estas expresiones en (3.2.29), hallamos

$$p_{\text{a.f.}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(c\sqrt{\frac{D}{(s_1^0)^2 + (s_2^0)^2}}\right).$$

Igualando esta expresión a la magnitud α, obtenemos la ecuación para determinar el umbral

$$\Phi\left(c\sqrt{\frac{D}{(s_1^0)^2 + (s_2^0)^2}}\right) = \frac{1}{2} - \alpha. \tag{3.2.39}$$

Sea v el valor del argumento de la función de Laplace para el cual ésta es igual a $1/2 - \alpha$, es decir, $\Phi(v) = 1/2 - \alpha$. Comparando esta igualdad con (3.2.39), hallamos

$$c = v\sqrt{\frac{(s_1^0)^2 + (s_2^0)^2}{D}}. \tag{3.2.40}$$

Ahora bien, en este caso el umbral c se determina directamente por la fórmula (3.2.40) y la segunda fórmula de (3.2.37) se hace innecesaria.

§ 3.3. Leyes de distribución de las funciones de magnitudes aleatorias

En los problemas prácticos se necesita frecuentemente hallar las leyes de distribución de magnitudes aleatorias que representan las funciones de otras magnitudes aleatorias que tienen leyes de distribución conocidas.

Supongamos que la magnitud aleatoria Y representa la función unívoca dada de la magnitud aleatoria X:

$$Y = \varphi(X). \tag{3.3.1}$$

El problema consiste en hallar la densidad de probabilidad $f_2(y)$ de la magnitud aleatoria Y conociendo la densidad de probabilidad $f_1(x)$ de la magnitud aleatoria X.

Hallemos la densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes aleatorias X, Y. Para esto hallemos primeramente la densidad condicional de probabilidad de la magnitud aleatoria Y con respecto a X. En el caso en cuestión, para cada valor x de la magnitud X, la magnitud aleatoria Y tiene el único valor posible $\varphi(x)$ y la probabilidad condicional de este valor con respecto al acontecimiento $X = x$ es igual a la unidad. Por consiguiente, la densidad condicional de probabilidad de la función aleatoria Y con respecto a la X representa una función delta

$$f_2(y \mid x) = \delta(y - \varphi(x)). \tag{3.3.2}$$

Sustituyendo esta expresión en (3.2.10), hallemos la densidad conjunta de la probabilidad de las magnitudes aleatorias X y Y:

$$f(x, y) = f_1(x)\,\delta(y - \varphi(x)). \tag{3.3.3}$$

Pues bien, si la distribución bidimensional está dispuesta totalmente en cierta curva (lo que corresponde al hecho de que para cada valor x de la magnitud X la magnitud Y tiene el único valor posible), entonces la densidad de probabilidad del vector aleatorio (X, Y) se expresa con ayuda de la función delta impulsiva por la fórmula (3.3.3).

Ahora, para hallar la densidad de probabilidad $f_2(y)$ de la magnitud aleatoria Y es suficiente emplear la fórmula (3.1.19). Entonces obtendremos

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\delta(y - \varphi(x))\,dx. \tag{3.3.4}$$

Esta fórmula es la fórmula general que determina la ley de distribución de una función unívoca determinada de la magnitud aleatoria X.

Examinemos ahora el caso de la dependencia continua recíprocamente unívoca entre las magnitudes aleatorias X, Y. Esto quiere decir que la función $\varphi(x)$ es continua y que no solamente a cada valor x de la magnitud aleatoria X le corresponde un valor y, y sólo

uno, de la magnitud Y sino que, a su vez, a cada valor de la magnitud Y le corresponde también un valor, y sólo uno, de la magnitud X. En la fig. 3.3.1. se muestra la curva $y = \varphi(x)$ para el caso de la dependencia recíprocamente unívoca de y con respecto a x. En la fig. 3.3.2. se representa el caso en que la dependencia entre x y y no es recíprocamente unívoca. Es fácil comprender que en el caso de la función continua $\varphi(x)$, la dependencia entre las magnitudes aleatorias X y Y es recíprocamente unívoca cundo, y solamente cuando, la función $\varphi(x)$ es monótona en la zona de los valores posibles de la magnitud aleatoria X.

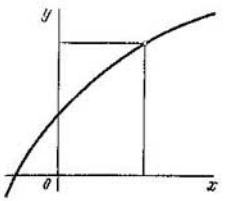


Fig. 3.3.1.

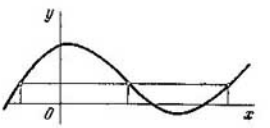


Fig. 3.3.2.

Suponiendo que la función $\varphi(x)$ es monótona en el intervalo (x_1, x_2) y la densidad de probabilidad $f_1(x)$ es igual a cero fuera de este intervalo, escribamos la fórmula (3.3.4) en la forma

$$f_2(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_1(u)\,\delta(y - \varphi(u))\,du. \tag{3.3.5}$$

Hagamos la sustitución de las variables

$$v = \varphi(u). \tag{3.3.6}$$

Considerando esta igualdad como una ecuación con respecto a u para el valor dado v, observamos que esta ecuación tiene la única solución en la zona de los valores posibles de la magnitud aleatoria X (fig. 3.3.1). Con otras palabras, en el caso en cuestión, existe la función inversa unívoca

$$u = \psi(v). \tag{3.3.7}$$

De aquí hallamos

$$du = |\psi'(v)|\,dv, \tag{3.3.8}$$

donde las diferenciales du y dv son positivas. Sustituyendo las expresiones (3.3.6) y (3.3.8) en la fórmula (3.3.5) y teniendo en cuenta que, al sustituir las variables (3.3.6), el intervalo (x_1, x_2) pasa al intervalo (y_1, y_2), obtendremos

$$f_2(y) = \int_{y_1}^{y_2} f_1(\psi(v))\,|\psi'(v)|\,\delta(y - v)\,dv. \tag{3.3.9}$$

De aquí, en virtud de la propiedad conocida de la función delta (2.2.6), hallamos

$$f_2(y) = f_1(\psi(y))\,|\psi'(y)|. \tag{3.3.10}$$

Ejemplo 3.3.1. La magnitud aleatoria Y es función lineal de la magnitud aleatoria X:

$$Y = aX + b. \tag{3.3.11}$$

Hallar su densidad de probabilidad conociendo la densidad de probabilidad $f_1(x)$ de la magnitud aleatoria X.

En el caso en cuestión, la función φ y la función inversa ψ se determinan respectivamente por las fórmulas

$$y = \varphi(x) = ax + b,$$
$$x = \psi(y) = (y - b)/a.$$

Sustituyendo la última expresión en (3.3.10), obtendremos la fórmula para la densidad de probabilidad de la función lineal de la magnitud aleatoria:

$$f_2(y) = \frac{1}{|a|} f_1\left(\frac{y-b}{a}\right). \tag{3.3.12}$$

En particular, cuando

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

de la fórmula hallada tendremos

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma|a|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[(y-b)/a-m]^2}{2\sigma^2}}$$

Así pues, la función lineal de una magnitud aleatoria normalmente repartida también está distribuida normalmente.

Ejemplo 3.3.2. Sea

$$Y = a \operatorname{sen} \omega X,$$

donde X es la magnitud aleatoria normalmente repartida en el intervalo $\pm\pi/2\omega$. Puesto que en este caso la función $\varphi(x) = a \operatorname{sen} \omega x$ es monótona en la zona de los valores posibles de la magnitud aleatoria X, entonces, la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Y se puede determinar por la fórmula (3.3.10). Para esto hallemos la función inversa

$$x = \psi(y) = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{a} \quad (|y| < a)$$

y su derivada

$$\psi'(y) = \frac{1}{\omega\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (3.3.10) y teniendo en cuenta que

$$f_1(x) = \begin{cases} \omega/\pi & \text{si } |x| \leqslant \pi/2\omega, \\ 0 & \text{si } |x| > \pi/2\omega, \end{cases}$$

obtendremos

$$f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - y^2}} & \text{si } |y| \leqslant a, \\ 0 & \text{si } |y| > a. \end{cases} \tag{3.3.13}$$

El gráfico de esta densidad de probabilidad se muestra en la fig. 3.3.3. Tal ley de distribución se llama *ley del arco seno*. Esta ley se encuentra frecuentemente en los problemas prácticos como ley de distribución de los errores debido a las excentricidades de los limbos en los goniómetros y otros instrumentos de medida.

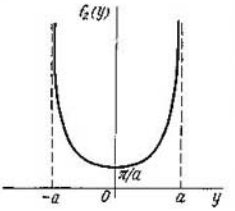


Fig. 3.3.3.

Ejemplo 3.3.3. Para mostrar como se aplica la fórmula (3.3.4) en el caso general, cuando la función $\varphi(x)$ no es monótona en el intervalo de los valores posibles de la magnitud aleatoria X, examinemos el caso cuando

$$Y = \operatorname{sen} X,$$

y la magnitud aleatoria X está uniformemente repartida en el intervalo $\pm\pi$:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{si} \quad |x| \leqslant \pi, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \pi. \end{cases}$$

Según (3.3.4) la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Y se determina por la fórmula

$$f_2(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(y - \operatorname{sen} x)\, dx.$$

Para calcular esta integral, dividamos la zona de integración en tres partes

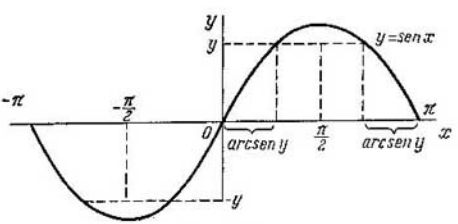


Fig. 3.3.4.

tales, que la función

$$y = \operatorname{sen} x = \varphi(x)$$

sea monótona en cada una de ellas. Entonces obtendremos

$$f_2(y) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} \delta(y - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(y - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \delta(y - \operatorname{sen} x)\, dx\right].$$

Hallamos las funciones inversas para cada parte de integración. De la fig. 3.3.4 se deduce que

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= -\pi - \operatorname{arc\,sen} y \quad \text{si} \quad -1 \leqslant y \leqslant 0, \\ \psi_2(y) &= \operatorname{arc\,sen} y \quad \text{si} \quad -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ \psi_3(y) &= \pi - \operatorname{arc\,sen} y \quad \text{si} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{aligned}$$

Hallemos las derivadas de las funciones inversas para cada parte:

$$\psi_1'(y) = \psi_3'(y) = -(1-y^2)^{-1/2},$$
$$\psi_2'(y) = (1-y^2)^{-1/2}.$$

Sustituyendo en las integrales las variables respectivamente $x = \psi_1(\eta)$, $x = \psi_2(\eta)$, $x = \psi_3(\eta)$, teniendo en cuenta que en este caso sea $x = \eta$, y aplicando las expresiones obtenidas para $\psi_1'(x)$, $\psi_2'(x)$ y $\psi_3'(x)$, tendremos

$$f_2(y) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-1}^{0} \delta(y-\eta)(1-\eta^2)^{-1/2}\,d\eta + \int_{-1}^{1} \delta(y-\eta)(1-\eta^2)^{-1/2}\,d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_{0}^{1} \delta(y-\eta)(1-\eta^2)^{-1/2}\,d\eta\right] = \frac{1}{2\pi}\left[2\int_{-1}^{1} \delta(y-\eta)(1-\eta^2)^{-1/2}\,d\eta\right].$$

De aquí para $|y| < 1$ hallamos

$$f_2(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Fuera del intervalo $|y| < 1$, la densidad de probabilidad $f_2(y)$ es igual a cero, puesto que para $|y| > 1$ la función subintegral en el último intervalo es idénticamente igual a cero en el intervalo de integración.
Ahora bien, la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Y se determina por la fórmula

$$f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } |y| < 1, \\ 0 & \text{si } |y| > 1. \end{cases}$$

Ejemplo 3.3.4. La magnitud aleatoria X está repartida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Hallar la ley de distribución de la magnitud aleatoria $Y = X^2$.
En vista de la monotonía de la función $y = \varphi(x)$ en el intervalo $(0, 1)$, la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Y se puede determinar por la fórmula (3.3.10). Dado que

$$x = \psi(y) = \sqrt{y},\ \psi'(y) = 1/2\sqrt{y} \text{ y } f_1(x) = 1$$
$$\text{para } 0 < x < 1, \text{ hallamos}$$
$$f_2(y) = \begin{cases} 1/2\sqrt{y} & \text{si } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0,\ y \geqslant 1. \end{cases}$$

Ejemplo 3.3.5. La magnitud aleatoria X está repartida uniformemente en el intervalo $(-1, 1)$. Hallar la ley de distribución de la magnitud aleatoria $Y = X^2$.
En este caso la dependencia entre las magnitudes aleatorias no es recíprocamente unívoca en la zona de los valores posibles de la magnitud X. Por consiguiente, no se puede aprovechar la fórmula (3.3.10) y hay que recurrir a la fórmula general (3.3.4). Puesto que la magnitud aleatoria X está distribuida uniformemente en el intervalo $(-1, 1)$, entonces, según la fórmula (3.3.4), obtendremos

$$f_2(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \delta(y-x^2)\,dx.$$

La función $y = x^2$ es monótona en cada uno de los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Por lo tanto, en el intervalo $(-1, 0)$ tenemos que

$$x = \psi_1(y) = -\sqrt{y}, \qquad \psi_1'(y) = -1/2\sqrt{y},$$

y en el intervalo $(0, 1)$

$$x = \psi_2(y) = \sqrt{y}, \qquad \psi_2'(y) = 1/2\sqrt{y}.$$

Por eso, dividamos la zona de integración en dos partes y cumplamos en la primera integral la sustitución de las variables $x = \psi_1(\eta)$ y en la segunda, $x = \psi_2(\eta)$. Entonces obtendremos

$$f_2(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \delta(y-\eta)\frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}} + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \delta(y-\eta)\frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \delta(y-\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{si} \quad 0 < y < 1.$$

Por consiguiente, la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Y se determina por la fórmula

$$f_2(y) = \begin{cases} 1/2\sqrt{y} & \text{si} \quad 0 < y < 1, \\ 0 & \text{si} \quad y < 0, \ y > 1. \end{cases}$$

Ejemplo 3.3.6. Hallar la ley de distribución de la señal de salida Y del elemento no lineal en el ejemplo 2.2.1.

Según los datos, la señal de salida Y está limitada en magnitud absoluta por el número a y es igual a la señal de entrada X cuando este último tiene el valor en los límites $(-a, a)$, es decir

$$Y = \varphi(X) = \begin{cases} a \text{ si } X > a, \\ X \text{ si } |X| \leqslant a, \\ -a \text{ si } X < -a. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la señal de entrada X está uniformemente repartida en el intervalo $-2{,}5a < x < 1{,}5a$, según la fórmula (3.3.4), obtenemos

$$f_2(y) = \frac{1}{4a}\int_{-2{,}5a}^{1{,}5a} \delta(y-\varphi(x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{4a}\left[\int_{-2{,}5a}^{-a} \delta(y+a)\,dx + \int_{-a}^{a} \delta(y-x)\,dx + \int_{a}^{1{,}5a} \delta(y-a)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4a}[1(y+a) - 1(y-a)] + \frac{3}{8}\delta(y+a) + \frac{1}{8}\delta(y-a).$$

De un modo absolutamente semejante se determina la ley de distribución del vector aleatorio Y que representa la función de simple valuación del vector aleatorio X cuya densidad de probabilidad es conocida. Supongamos que las componentes $Y_1, \ldots, Y_m$ del vector aleatorio Y son funciones de simple valuación de las componentes $X_1, \ldots, X_n$ del vector aleatorio X:

$$Y_j = \varphi_j(X_1, \ldots, X_n) \qquad (j = 1, \ldots, m). \qquad (3.3.14)$$

Es necesario hallar la densidad de probabilidad $f_2(y_1, \ldots, y_m)$ del vector aleatorio Y, conociendo la densidad de probabilidad $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ del vector aleatorio X.

Para resolver el problema planteado, hallamos primeramente la densidad condicional de probabilidad del vector aleatorio Y con respecto a X. Puesto que para cualesquiera valores $x_1, \ldots x_n$ de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ cada una de las magnitudes aleatorias $Y_1, \ldots, Y_m$ tiene, en virtud de las fórmulas (3.3.14), solamente un único valor y la probabilidad de este valor es igual a la unidad, entonces la densidad condicional de probabilidad del vector aleatorio Y con respecto a X representa el producto de las funciones delta

$$f_2(y_1, \ldots, y_m \mid x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{m} \delta(y_j - \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)). \quad (3.3.15)$$

La densidad conjunta de probabilidad de los vectores aleatorios X y Y, según la fórmula (3.2.19), es igual a

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f_1(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{m} \delta(y_j - \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)). \quad (3.3.16)$$

Integrando esta igualdad con respecto a $x_1, \ldots, x_n$ y cambiando la designación de la variable de integración, hallaremos, según la fórmula (3.1.19), la densidad buscada de probabilidad del vector aleatorio Y:

$$f_2(y_1, \ldots, y_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u_1, \ldots u_n) \prod_{j=1}^{m} \delta(y_j - \varphi_j(u_1, \ldots, u_n))\, du_1 \ldots du_n. \quad (3.3.17)$$

Ahora supongamos que el número m de las magnitudes aleatorias Y_j es igual al número n de las magnitudes aleatorias X_i y que la dependencia entre las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ y $Y_1, \ldots, Y_n$ es recíprocamente unívoca. Este quiere decir que el sistema de ecuaciones

$$v_j = \varphi_j(u_1, \ldots, u_n) \quad (j = 1, \ldots n) \quad (3.3.18)$$

tiene la solución única en la zona de los valores posibles de las magnitudes $X_1, \ldots X_n$:

$$u_i = \psi_i(v_1, \ldots, v_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \quad (3.3.19)$$

Al llevar a cabo en (3.3.17), para $m = n$, la sustitución de las variables de integración valiéndose de las fórmulas (3.3.18), (3.3.19), de acuerdo con la regla de sustitución de las variables en una integral

múltiple obtendremos

$$f_2(y_1, \ldots, y_n) = \int \cdots \int_{B} f_1(\psi_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, \psi_n(v_1, \ldots, v_n)) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \delta(y_j - v_j) \left| \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(v_1, \ldots, v_n)} \right| dv_1, \ldots, dv_n, \quad (3.3.20)$$

donde

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(v_1, \ldots, v_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_1} & \frac{\partial\psi_1(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_n} \\ \frac{\partial\psi_2(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_1} & \frac{\partial\psi_2(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_2(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_n(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_1} & \frac{\partial\psi_n(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_n(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_n} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano de las funciones (3.3.19) y B, la zona en el espacio de las variables $v_1, \ldots, v_n$ en la cual las fórmulas (3.3.18) transforman a todo el espacio de las variables $u_1, \ldots, u_n$ (en el caso particular, B puede coincidir con todo el espacio de las variables $v_1, \ldots, v_n$). La integración en la fórmula (3.3.20) se puede cumplir aplicando la propiedad fundamental (2.2.6) de la función delta. Como resultado obtendremos

$$f_2(y_1, \ldots, y_n) =$$
$$= f_1(\psi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(y_1, \ldots, y_n)) \left| \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right|. \quad (3.3.21)$$

Aquí, al calcular el jacobiano, los argumentos $v_1, \ldots, v_n$ de las funciones $\psi_i(v_1, \ldots, v_n)$ deben ser sustituidos por las variables correspondientes $y_1, \ldots, y_n$. La fórmula (3.3.21) es válida para todos los valores $y_1, \ldots, y_n$ en la zona B. Fuera de la zona B la densidad de probabilidad $f_2(y_1, \ldots, y_n)$ es igual a cero.

Ejemplo 3.3.7. Hallar las leyes de distribución de las coordenadas polares de un punto aleatorio situado en el plano, si las coordenadas rectangulares del mismo tienen la densidad conjunta de probabilidad $f_1(x, y)$.

Designemos las coordenadas polares (el radio vector y el ángulo polar) por R y Φ. Estas coordenadas están ligadas con las rectangulares X e Y por las dependencias

$$X = R\cos\Phi, \quad Y = R\operatorname{sen}\Phi \ (R \geqslant 0, \ 0 \leqslant \Phi \leqslant 2\pi)$$

con el jacobiano $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(R, \Phi)} = R$. Aprovechando las dependencias obtenidas, presentemos la expresión para la densidad conjunta de probabilidad de las coordenadas polares $f_2(r, \varphi)$ en la forma

$$f_2(r, \varphi) = f_1(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = r f_1(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi). \quad (3.3.22)$$

Por integración de la última igualdad con respecto a φ y r correspondiente, hallamos la densidad de probabilidad del radio vector y del ángulo polar:

$$\left.\begin{aligned} f_r(r) &= r\int_0^{2\pi} f_1(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi, \\ f_\varphi(\varphi) &= \int_0^{\infty} f_1(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\,r\,dr. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.23}$$

Si la densidad conjunta de probabilidad de las coordenadas rectangulares depende solamente del radio vector, es decir, $f_1(x, y) = f_1(\sqrt{x^2+y^2}) = h(r)$, entonces de (3.3.23) obtenemos

$$f_r(r) = 2\pi r h(r), \tag{3.3.24}$$

$$f_\varphi(\varphi) = \int_0^{\infty} r h(r)\,dr = \text{const}. \tag{3.3.25}$$

En el caso particular de una distribución normal circular en el plano, cuando

$$h(r) = \frac{1}{2\pi D}\, e^{-\frac{r^2}{2D}}, \tag{3.3.26}$$

de (3.3.24) y (3.3.25) hallamos

$$f_r(r) = \frac{r}{D}\, e^{-\frac{r^2}{2D}},$$

$$f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \tag{3.3.27}$$

Por consiguiente, el radio vector del punto aleatorio está repartido por la ley de Rayleigh y la fase está repartida uniformemente.

Ejemplo 3.3.8. Hallar la ley de distribución de la amplitud y de la fase de las oscilaciones armónicas aleatorias de frecuencia determinada

$$X(t) = U\operatorname{sen}\omega t + Z\cos\omega t, \tag{3.3.28}$$

si los coeficientes U, Z son independientes, normalmente repartidos con iguales dispersiones D y con esperanzas matemáticas iguales a cero.

En el caso dado se puede aprovechar directamente los resultados obtenidos en el ejemplo anterior. En efecto, presentemos (3.3.28) en la forma

$$X(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \Phi), \tag{3.3.29}$$

donde

$$A = \sqrt{U^2 + Z^2}, \qquad \Phi = \operatorname{arctg}(Z/U).$$

Entonces la densidad conjunta de probabilidad $f_1(u, z)$ de los coeficientes U, Z, en virtud de que U, Z son independientes, están normalmente distribuidos con iguales dispersiones y esperanzas matemáticas iguales a cero, se expresa por la fórmula

$$f_1(u, z) = \frac{1}{2\pi D}\, e^{-\frac{(u^2+z^2)}{2D}}. \tag{3.3.30}$$

Por lo tanto, la amplitud A de una oscilación armónica aleatoria está distribuida por la ley de Rayleigh y la fase Φ está uniformemente repartida de modo

que

$$f_a(a) = \frac{a}{D} e^{-\frac{a^2}{2D}},$$

$$f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \tag{3.3.31}$$

Por eso, en los problemas concernientes a la radiotécnica, donde es necesario examinar frecuentemente las señales que representan oscilaciones armónicas con amplitud y fase aleatorias, es la ley de Rayleigh la que se suele tomar en calidad de ley de distribución de la amplitud.

Ejemplo 3.3.9. Hallar la ley de distribución de la suma de las magnitudes aleatorias

$$Z = X + Y, \tag{3.3.32}$$

conociendo la ley de distribución de los sumandos.

Al sustituir en (3.3.32) las magnitudes aleatorias por sus valores posibles, obtendremos

$$z = x + y = \varphi(x, y) \tag{3.3.33}$$

Esta ecuación tiene la solución única respecto a cualquiera de las variables, x, y. Despejando en ella, por ejemplo, x hallamos

$$x = z - y = \psi(z, y).$$

Como en el caso dado tenemos una sola función ψ, entonces el jacobiano es igual a $\partial\psi/\partial z = 1$.

Por eso, aplicando la fórmula (3.3.17), en el caso en cuestión tendremos

$$f_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y)\,\delta(z - x - y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y, y)\,dy. \tag{3.3.34}$$

La segunda integral en esta fórmula se obtiene si en la ecuación (3.3.33) se despeja y en vez de x.

La fórmula (3.3.34) determina la ley de distribución de la suma de las magnitudes aleatorias X e Y tanto dependientes como independientes. Conviene señalar un importante caso particular cuando los sumandos X e Y son independientes. En este caso

$$f_1(x, y) = k(x)\,l(y), \tag{3.3.35}$$

donde $k(x)$ es la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria X, $l(y)$ es la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Y. En este caso particular la substitución de la expresión (3.3.35) en la fórmula (3.3.34) da como resultado

$$f_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} k(z-y)\,l(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,l(z-x)\,dx. \tag{3.3.36}$$

La integral de tal tipo se llama de ordinario *convolución* de las funciones k y l. Ahora bien, la densidad de probabilidad de la suma de dos magnitudes aleatorias independientes representa la convolución de las densidades de probabilidad de los sumandos.

La operación concerniente a la determinación de la ley de distribución de la suma según las leyes de distribución de los sumandos independientes ha

recibido en la Teoría de Probabilidades el nombre de *adición* o *composición* de las leyes de distribución.

Es evidente que de un modo absolutamente análogo se puede obtener la ley de distribución de la suma de un número cualquiera de magnitudes aleatorias. En lo que se refiere a los sumandos independientes, se puede proceder también del modo siguiente: hallar la composición de las leyes de distribución de los dos primeros sumandos, luego hallar la composición de la ley de distribución de la suma de los dos primeros y la ley mencionada del tercer sumando, etc.

§ 3.4. Momentos de un vector aleatorio

Se llama momento de orden $r+s$ de un vector aleatorio (X, Y) a la esperanza matemática del producto $X^r Y^s$:

$$\alpha_{rs} = M[X^r Y^s] \tag{3.4.1}$$

para cualesquiera r y s enteros no negativos.

Es evidente que en el vector aleatorio bidimensional existen $k+1$ momentos del orden dado k, es decir, tantos cuantos son los procedimientos que se pueden emplear para partir un número entero positivo k en dos sumandos enteros no negativos.

Para calcular los momentos de un vector aleatorio, valgámonos de la fórmula general para la esperanza matemática de la función unívoca arbitraria, real o compleja, de las magnitudes aleatorias X, Y. En virtud de la definición de la esperanza matemática como valor medio probabilístico pesado, para determinar dicha esperanza de la magnitud aleatoria $\varphi(X, Y)$ conviene multiplicar cada valor posible $\varphi(x, y)$ de esta última por el elemento de probabilidad correspondiente $f(x, y)\,dx\,dy$ e integrar el resultado obtenido con respecto a todos los valores posibles x, y de las magnitudes aleatorias X, Y. Como resultado obtendremos

$$M[\varphi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx\,dy. \tag{3.4.2}$$

Es fácil comprobar que en el caso en que la función φ depende solamente de uno de los argumentos, la fórmula (3.4.2) da el mismo resultado que (2.3.4). En efecto, si, por ejemplo, $\varphi(X, Y) \equiv \varphi(X)$ no depende de Y, la fórmula (3.4.2) da como resultado:

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy. \tag{3.4.3}$$

Pero, en virtud de (3.1.18), la integral de la densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes X, Y con respecto a y es igual

a la densidad de probabilidad de la magnitud X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = f_1(x).$$

Por eso la fórmula (3.4.3) se puede escribir en la forma

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_1(x)\, dx,$$

lo que demuestra la afirmación enunciada. Así pues, como era de esperar, la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $\varphi(X)$ calculada por diversos procedimientos con ayuda de diferentes densidades de probabilidad, ligadas con la magnitud aleatoria X, siempre resulta la misma.

Suponiendo en la fórmula (3.4.2) $\varphi(x, y) = x^r y^s$, obtendremos la siguiente fórmula para los momentos de un vector aleatorio:

$$\alpha_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x, y)\, dx, dy. \qquad (3.4.4)$$

En particular, esta fórmula da los momentos α_{r0} y α_{0s} de las magnitudes aleatorias X y Y tomadas por separado.

Ahora bien, los momentos del vector aleatorio (X, Y), en los cuales uno de los índices es igual a cero, coinciden con los momentos de las componentes correspondientes del vector mencionado:

$$\alpha_{r0} = \alpha_r^x, \quad \alpha_{0s} = \alpha_s^y,$$

donde α_r^x y α_s^y son el momento de orden r de la magnitud aleatoria X y el momento de orden s de la magnitud aleatoria Y respectivamente. En particular, los momentos α_{10} y α_{01} son iguales a las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X y Y respectivamente.

De un modo semejante se determinan los momentos centrales del vector aleatorio. Se denomina *momento central de orden* $r + s$ del vector aleatorio (X, Y) a la esperanza matemática del producto $(X^0)^r (Y^0)^s$:

$$\mu_{rs} = M[(X^0)^r (Y^0)^r], \qquad (3.4.5)$$

donde $X^0 = X - m_x$, $Y^0 = Y - m_y$ son las magnitudes aleatorias centradas correspondientes. Para calcular estos momentos, supongamos que en la fórmula (3.4.2)

$$\varphi(x, y) = (x - m_x)^r (y - m_y)^s.$$

Entonces obtendremos

$$\mu_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^r (y - m_y)^s f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3.4.6)$$

Suponiendo que en esta fórmula uno de los índices r, s es igual a cero, obtendremos los momentos centrales de las componentes del vector aleatorio

$$\mu_{r0} = \mu_r^x, \quad \mu_{0s} = \mu_s^y.$$

En particular, los momentos centrales de segundo orden μ_{20} y μ_{02} representan las dispersiones de las magnitudes aleatorias X y Y:

$$\mu_{20} = \mu_2^x = D_x, \quad \mu_{02} = \mu_2^y = D_y.$$

Para los fines prácticos tiene gran importancia aquella parte de la Teoría de Probabilidades que se limita a la investigación de los momentos de primer y segundo orden de las magnitudes aleatorias. En lo que toca a la ley normal de distribución de la magnitud aleatoria escalar, como hemos visto, para determinar por completo la ley de distribución es suficiente conocer el primer momento de la magnitud aleatoria, es decir, la esperanza matemática, y el segundo momento central, es decir, la dispersión. Para las leyes de distribución distintas de la normal esta tesis puede no ser válida. Puede ocurrir que no sea bastante el conocimiento de la esperanza matemática y de la dispersión para caracterizar por completo la ley de distribución. Pero, no obstante, la dispersión caracteriza la fluctuación de una magnitud aleatoria. Esto ofrece la posibilidad de limitarse en muchos problemas prácticos a la determinación de los momentos de primer y segundo orden de la magnitud aleatoria, haciendo caso omiso de la ley de distribución.

Para el vector aleatorio bidimensional existe, además de los momentos de segundo orden μ_{20} y μ_{02}, todavía el momento de segundo orden μ_{11}. Este momento, que tiene una importancia especial para los fines prácticos, se llama *momento de correlación* o *momento de enlace* de las magnitudes aleatorias X, Y. Designaremos el momento de correlación de las magnitudes aleatorias X, Y por k_{xy}. Suponiendo en la fórmula (3.4.6) $r = s = 1$, obtendremos para el momento de correlación de las magnitudes aleatorias X, Y la fórmula siguiente:

$$k_{xy} = \mu_{11} = M[X^0 Y^0] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3.4.7)$$

El momento de correlación de dos magnitudes aleatorias caracteriza hasta cierto grado, no por completo, la dependencia entre estas magnitudes aleatorias. En efecto, el momento de correlación

es el análogo teórico del momento de correlación estadístico [§ 1.2, la fórmula (1.2.22)]. En el § 1,2 la intuición nos ha sugerido que el momento de correlación estadístico distinto de cero indica la existencia de cierta dependencia entre las magnitudes aleatorias. Por eso, es natural esperar que las magnitudes aleatorias sean dependientes, si el momento de correlación de las mismas es distinto de cero.

Las magnitudes aleatorias X y Y se llaman correlacionadas siempre que su momento de correlación sea distinto de cero. Las magnitudes aleatorias se denominan *no correlacionadas* si su momento de correlación es igual a cero.

Demostremos que las magnitudes aleatorias independientes nunca están correlacionadas. En efecto, supongamos que X y Y sean independientes. Entonces su densidad conjunta de probabilidad es igual al producto de sus densidades de probabilidad, y podemos escribir

$$k_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x)\, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y)\, dy \right). \quad (3.4.8)$$

Pero cada una de estas integrales es igual a cero como momento central de primer orden de la magnitud aleatoria correspondiente. Por consiguiente, el momento de correlación de las magnitudes aleatorias independientes siempre es igual a cero. Con otras palabras, las magnitudes aleatorias independientes siempre están no correlacionadas. De aquí resulta que las magnitudes aleatorias correlacionadas siempre son dependientes, que es lo que nosotros esperabamos. La tesis inversa no tiene validez, es decir, las magnitudes dependientes pueden estar tanto correlacionadas como no correlacionadas. Aclaremos esto con un ejemplo sencillo. Examinemos la dependencia funcional $Y = X^2$. Esto quiere decir que todas las posiciones posibles de un punto aleatorio en el plano se disponen en la parábola $y = x^2$. Aquí es evidente la más rigorosa dependencia entre X y Y, puesto que el valor de la magnitud X determina por completo el valor de la magnitud Y. Supongamos que la distribución de la magnitud aleatoria X es simétrica con respecto al origen de coordenadas. En este caso $m_x = 0$, y a un mismo valor de la magnitud Y le corresponden dos valores de la magnitud X iguales en magnitud absoluta y de signos contrarios para los cuales la densidad de probabilidad tiene un mismo valor. Por eso, a cada elemento positivo de la integral (3.4.7) le corresponde un elemento negativo igual en magnitud absoluta. Por lo tanto, en este caso, el momento de correlación k_{xy} es igual a cero, es decir, las magnitudes aleatorias X y Y no están correlacionadas. Ahora bien, aquí las magnitudes X

y Y no están correlacionadas a pesar de que entre ellas existe la dependencia funcional.

Se puede demostrar una afirmación todavía más general: si la distribución conjunta de las magnitudes aleatorias X, Y es simétrica por lo menos respecto a una de las rectas paralelas a los ejes de coordenadas y que pasan por el punto (m_x, m_y), entonces el momento de correlación de estas magnitudes es igual a cero. En efecto, en este caso, a cada elemento positivo de la integral (3.4.7) le corresponde un elemento negativo de igual magnitud absoluta.

Así pues, para las magnitudes aleatorias con momentos finitos de segundo orden, la noción de no correlatividad es más amplia que la de independencia. Cuando decimos que las magnitudes aleatorias no están correlacionadas, superponemos en ellas limitaciones considerablemente menores que en el caso cuando decimos que ellas son independientes. La exigencia de independencia de las magnitudes es más rigurosa que la de no correlatividad.

En algunos casos es más conveniente examinar el momento de correlación normal o, como éste suele llamarse, el coeficiente de correlación. Se denomina *coeficiente de correlación* de las magnitudes aleatorias X y Y la relación del momento de correlación de las mismas a la media geométrica de sus dispersiones:

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{3.4.9}$$

Ejemplo 3.4.1. Hallar el momento de correlación de las componentes de un vector aleatorio repartido uniformemente en un rectángulo.

Como la distribución conjunta de las componentes del vector aleatorio dispuesto en el plano es simétrica con respecto a los ejes de coordenadas, entonces es evidente que $m_x = m_y = 0$, $k_{xy} = 0$. De esto se puede convencerse llevando a cabo la comprobación directa. Por consiguiente, (véase el ejemplo 3.2.1), las componentes del vector aleatorio (X, Y) no solamente están no correlacionadas sino que son también independientes.

Ejemplo 3.4.2. Hallar el momento de correlación de las componentes de un vector aleatorio uniformemente repartido en la elipse.

En virtud de la simetría de la distribución de probabilidades del vector aleatorio, está claro que $m_x = m_y = 0$, $k_{xy} = 0$.

Sin embargo, en el ejemplo 3.2.2 hemos descubierto que X e Y son dependientes. Así pues, las magnitudes aleatorias X, Y son dependientes pero no están correlacionadas.

Si en la definición de la esperanza matemática y de la dispersión de una magnitud aleatoria, enunciada en el § 2.3 [las fórmulas (2.3.2) y (2.3.9)] la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria X se sustituye por la densidad condicional de probabilidad de X con respecto a cierto acontecimiento A o con respecto a otra magnitud aleatoria Y, obtendremos la definición de *la esperanza matemática condicional* y *de la dispersión condicional* de X con respecto a A o Y. Designaremos la esperanza matemática y la dispersión condicionales de la magnitud aleatoria X con respecto al acontecimiento A por

$M[X \mid A]$ y $D[X \mid A]$ respectivamente. De un modo análogo designaremos la esperanza matemática y la dispersión condicionales de la magnitud aleatoria X con respecto a la magnitud Y correspondientemente por $M[X \mid Y]$ y $D[X \mid Y]$.

De un modo absolutamente igual que para un vector aleatorio bidimensional se determinan los momentos de un vector aleatorio con un número cualquiera de componentes. Le dejamos al lector que por sí mismo escriba las fórmulas generales y nos limitaremos a los momentos de primer y segundo orden.

Los momentos de primer orden de un vector aleatorio n-dimensional X representan las esperanzas matemáticas $m_{x_1}, \ldots, m_{x_n}$ de las componentes $X_1, \ldots, X_n$. Esto da lugar a que la esperanza matemática del vector aleatorio X se defina como vector m_x cuyas componentes son las esperanzas matemáticas $m_{x_1}, \ldots, m_{x_n}$ de las componentes $X_1, \ldots, X_n$ correspondientes del vector aleatorio X.

Los momentos centrales de segundo orden del vector aleatorio n-dimensional X representan las dispersiones $D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}$ y todos los momentos de correlación $k_{x_1x_2}, k_{x_1x_3}, \ldots, k_{x_{n-1}x_n}$ de sus componentes $X_1, \ldots, X_n$. Suponiendo, para abreviar, que

$$k_{\nu\nu} = D_{x_\nu};\ k_{\nu\mu} = k_{x_\nu x_\mu}\ (\nu, \mu = 1, \ldots, n;\ \nu \neq \mu) \qquad (3.4.10)$$

obtendremos n^2 momentos centrales del vector aleatorio X que se pueden considerar como elementos de la matriz cuadrada *).

$$K = \begin{Vmatrix} k_{11} k_{12} \ldots k_{1n} \\ k_{21} k_{22} \ldots k_{2n} \\ k_{n1} k_{n2} \ldots k_{nn} \end{Vmatrix} = \| k_{\nu\mu} \|_{\nu,\, \mu = 1, \ldots, n}. \qquad (3.4.11)$$

Esta matriz se llama *matriz de correlación* del vector aleatorio X.

Ahora bien, si se limita a los momentos de primer y de segundo orden del vector aleatorio X, éste se caracterizará por el vector de esperanza matemática m_x y por la matriz de correlación K.

El momento de correlación de dos magnitudes aleatorias no depende evidentemente del orden en el que se toman estas magnitudes

$$k_{\nu\mu} = M[X^0_\nu X^0_\mu] = M[X^0_\mu X^0_\nu] = k_{\mu\nu} \qquad (3.4.12)$$

Así pues, los elementos de la matriz de correlación dispuestos simétricamente con respecto a la diagonal principal son iguales uno a otro, es decir, la matriz de correlación es simétrica.

---

*) Se llama *matriz* a un cuadro de números dispuestos en renglones y columnas. Si el número de renglones es igual al de columnas, la matriz se llama cuadrada. Si el número de renglones no es igual al de columnas, la matriz se llama rectangular.

§ 3.5. Función característica de un vector aleatorio

La función característica de un vector aleatorio X con las componentes $X_1, \ldots, X_n$ se determina por la fórmula

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = M\,[\exp\{i(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n)\}]. \quad (3.5.1)$$

Cuando $n = 1$, de esta fórmula se deduce la definición de la función característica, de una magnitud aleatoria escalar, enunciada en el § 2.4.

Aplicando la fórmula (3.4.2) (más exactamente, su generalización referente al vector aleatorio n-dimensional) para el cálculo de la esperanza matemática, obtendremos la siguiente expresión para la función característica del vector aleatorio X:

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)\} \times$$
$$\times f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \quad (3.5.2)$$

Dado que la densidad de probabilidad de un vector aleatorio, debido a sus propiedades principales (3.1.15) y (3.1.16), es una función integrable no negativa, se puede presentar dicha densidad por la integral de Fourier

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \times$$
$$\times \exp\{i[\lambda_1(\xi_1 - x_1) + \ldots + \lambda_n(\xi_n - x_n)]\}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \quad (3.5.3)$$

Pero en virtud de (3.5.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \exp\{i[\lambda_1(\xi_1 - x_1) + \ldots + \lambda_n(\xi_n - x_n)]\} \times$$
$$\times d\xi_1 \ldots d\xi_n = \exp\{-i(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)\}\, g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Por eso la fórmula (3.5.3) se puede presentar en la forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)\} \times$$
$$\times g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n. \quad (3.5.4)$$

Esta fórmula enuncia la densidad de probabilidad del vector aleatorio por medio de la función característica del mismo.

Ahora bien, la función característica puede servir de característica probabilística completa de un vector aleatorio. Conociendo la función característica, se puede hallar, por la fórmula (3.5.4), la

densidad de probabilidad del vector aleatorio y, por consiguiente, la función de distribución del mismo.

Las fórmulas (3.5.2) y (3.5.4) muestran que la función característica del vector aleatorio es la transformación de Fourier de su densidad de probabilidad y esta última es la transformación inversa de Fourier de la función característica.

Conociendo la función característica del vector aleatorio, se puede determinar fácilmente los momentos del mismo. En efecto, al derivar la fórmula (3.5.2) k_1 veces con respecto a λ_1, k_2 veces con respecto a λ_2, etc, k_n veces con respecto a λ_n, obtendremos *)

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial\lambda_1^{k_1}\partial\lambda_2^{k_2}\ldots\partial\lambda_n^{k_n}} = i^{k_1+\ldots+k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\times$$

$$\times \exp\{i(\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n)\} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{3.5.5}$$

Suponiendo que aquí $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, obtendremos

$$\alpha_{k_1, \ldots, k_n} = \frac{1}{i^{k_1+\ldots+k_n}}\left[\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial\lambda_1^{k_1}\partial\lambda_2^{k_2}\ldots d\lambda_n^{k_n}}\right]_0 \tag{3.5.6}$$

$$(k_1, \ldots, k_n = 1, 2, \ldots),$$

donde el cero significa que, una vez efectuada la derivación, hay que admitir que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$.

De un modo absolutamente semejante se puede expresar los momentos centrales del vector aleatorio mediante la función característica del mismo.

Con ayuda de las funciones características se puede resolver el problema de determinación de las leyes de distribución de las funciones de las magnitudes aleatorias, examinado en el § 3.3.

Examinemos primeramente una magnitud aleatoria escalar Y enlazada con otra magnitud aleatoria escalar X por la dependencia funcional

$$Y = \varphi(X), \tag{3.5.7}$$

donde φ es una función unívoca arbitraria. En virtud de la definición, la función característica de la magnitud aleatoria Y se expresa por la fórmula

$$g_2(\lambda) = M[e^{i\lambda Y}] = M[e^{i\lambda\varphi(X)}]$$

o bien

$$g_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\varphi(x)} f_1(x)\, dx, \tag{3.5.8}$$

*) Claro está que la fórmula (3.5.2) se puede derivar solamente en el caso de que las integrales, obtenidas como resultado de la derivación, se conviertan uniformemente, es decir, si existen los momentos correspondientes del vector aleatorio.

donde $f_1(x)$ es la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria X. Al tomar la transformación inversa de Fourier, hallaremos, según la fórmula (2.4.3), la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Y:

$$f_2(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda y} g_2(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.5.9}$$

De un modo análogo se hallan, con ayuda de las funciones características, las leyes de distribución de las funciones vectoriales de las magnitudes aleatorias. Si las componentes del vector aleatorio Y son las funciones unívocas conocidas de las componentes del vector aleatorio X:

$$Y_k = \varphi_k(X_1, \ldots, X_n) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{3.5.10}$$

entonces la función característica del vector aleatorio Y se define por la fórmula

$$g_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[\lambda_1 \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)]\} f_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{3.5.11}$$

donde $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ es la densidad de probabilidad del vector aleatorio X. Al tomar la transformación inversa de Fourier, hallaremos la densidad de probabilidad del vector aleatorio Y:

$$f_2(y_1, \ldots, y_m) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m)\} \times g_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_m. \tag{3.5.12}$$

Las fórmulas (3.5.11) y (3.5.12) resuelven por completo el problema planteado.

Ejemplo 3.5.1. Hallar la ley de distribución de la suma de dos magnitudes aleatorias independientes uniformemente repartidas cuyas esperanzas matemáticas son iguales a cero.

En este caso tenemos una sola magnitud aleatoria escalar Y que representa la suma de las componentes del vector aleatorio bidimensional X:

$$Y = X_1 + X_2.$$

Las densidades de probabilidad de las magnitudes aleatorias X_1 y X_2 se determinan correspondientemente por las fórmulas

$$h_1(x_1) = \begin{cases} 1/2a & \text{si } |x_1| \leqslant a, \\ 0 & \text{si } |x_1| > a, \end{cases}$$

$$h_2(x_2) = \begin{cases} 1/2b & \text{si } |x_2| \leqslant b. \\ 0 & \text{si } |x_2| > b. \end{cases}$$

La densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes aleatorias X_1 y X_2 es igual al producto de las densidades de probabilidad de las mismas. Aplicando la fórmula (3.5.11), hallamos la función característica de la magnitud aleatoria Y:

$$g_y(\lambda)=\frac{1}{4ab}\int_{-a}^{a}dx_1\int_{-b}^{b}e^{i\lambda(x_1+x_2)}\,dx_2=$$

$$=\frac{1}{4ab}\int_{-a}^{a}e^{i\lambda x_1}\,dx_1\int_{-b}^{b}e^{i\lambda x_2}\,dx_2=\frac{\operatorname{sen}\lambda a\operatorname{sen}\lambda b}{ab\lambda^2}\,.$$

Luego, según la fórmula (3.5.12), hallamos la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Y:

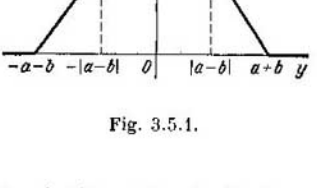


Fig. 3.5.1.

$$f_2(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda y}g_y(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda y}\frac{\operatorname{sen}\lambda a\cdot\operatorname{sen}\lambda b}{\lambda^2}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda y\cdot\operatorname{sen}\lambda a\cdot\operatorname{sen}\lambda b}{\lambda^2}\,d\lambda-$$

$$-\frac{i}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda y\cdot\operatorname{sen}\lambda a\cdot\operatorname{sen}\lambda b}{\lambda}\,d\lambda.$$

Pero la última integral es igual a cero como integral en límites simétricos de la función impar. Al mismo tiempo, la primera integral, como integral en límites simétricos de la función par, es igual a la integral doblada en los límites desde 0 hasta ∞. Por consiguiente,

$$f_2(y)=\frac{1}{\pi ab}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\lambda y\cdot\operatorname{sen}\lambda a\cdot\operatorname{sen}\lambda b}{\lambda^2}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{4\pi ab}\int_{0}^{\infty}[\cos(a-b+y)\lambda-\cos(a-b-y)\lambda-$$

$$-\cos(a+b+y)\lambda-\cos(a+b-y)\lambda]\frac{d\lambda}{\lambda^2}\,.$$

De aquí, aplicando la fórmula conocida

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda=\frac{\pi}{2}|\alpha|,$$

hallamos

$$f_2(y)=\frac{1}{8ab}(|a+b+y|+|a+b-y|-|a-b+y|-|a-b-y|).$$

El gráfico de esta densidad de probabilidad se muestra en la fig. 3.5.1.

§ 3.6. Ley normal bidimensional de distribución

La densidad de probabilidad del vector aleatorio (X, Y) bidimensional normalmente repartido se enuncia, en el caso general, por la fórmula

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}[c_{11}(x-a)^2 + 2c_{12}(x-a)(y-b) + c_{22}(y-b)^2]\right\}, \quad (3.6.1)$$

donde las magnitudes c_{11}, c_{22} y $c_{11}c_{22} - c_{12}^2$ son positivas. Hallemos la ley de distribución y las leyes condicionales de distribución de las componentes X y Y de este vector aleatorio. Según (3.1.18), la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria X se expresa por la fórmula

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[c_{11}(x-a)^2 + 2c_{12}(x-a)(y-b) + c_{22}(y-b)^2]\right\} dy =$$

$$= \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}c_{11}(x-a)^2\right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[2c_{12}(x-a)v + c_{22}v^2]\right\} dv. \quad (3.6.2)$$

Para el cálculo de la integral obtenida apliquemos la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, e^{\frac{\eta^2}{4h^2}}. \quad (3.6.3)$$

cuya deducción se expone en el suplemento [(fórmula (1)]. En virtud de esta fórmula,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[2c_{12}(x-a)v + c_{22}v^2]\right\} dv = \sqrt{\frac{2\pi}{c_{22}}} \exp\left\{\frac{c_{12}^2(x-a)^2}{2c_{22}}\right\}. \quad (3.6.4)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.6.2), obtendremos

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{22}\pi}} \exp\left\{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{22}}(x-a)^2\right\}. \quad (3.6.5)$$

Comparando esta fórmula con la expresión (2.5.12) de la densidad de probabilidad normal unidimensional, vemos que la componen-

te X del vector aleatorio bidimensional normalmente repartido (X, Y) también está distribuida normalmente; en este caso la esperanza matemática y la dispersión de dicha componente se determinan por las fórmulas

$$m_x = a, \quad D_x = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \tag{3.6.6}$$

En virtud de la simetría, la densidad de probabilidad $f_2(y)$ de la magnitud aleatoria Y se expresa por la fórmula análoga a (3.6.5):

$$f_2(y) = \sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{11}\pi}} \exp\left\{-\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{11}}(y-b)^2\right\}. \tag{3.6.7}$$

Al comparar esta fórmula con (2.5.12) resulta que la esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria Y se definen por las fórmulas

$$m_y = b, \quad D_y = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \tag{3.6.8}$$

Para determinar la densidad condicional de probabilidad de la magnitud aleatoria X con respecto a Y, apliquemos la fórmula (3.2.8). Sustituyendo en ella las expresiones (3.6.1) y (3.6.7), después de simplificar obtendremos

$$f_1 = (x \mid y) =$$

$$= \sqrt{\frac{c_{11}}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[c_{11}(x-a)^2 + 2c_{12}(x-a)(y-b) + \frac{c_{12}^2}{c_{11}}(y-b)^2\right]\right\}$$

o bien

$$f_1(x \mid y) = \sqrt{\frac{c_{11}}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{c_{11}}{2}\left[x - a + \frac{c_{12}}{c_{11}}(y-b)\right]^2\right\}. \tag{3.6.9}$$

Una fórmula semejante se obtiene para la densidad condicional de probabilidad de la magnitud aleatoria Y:

$$f_2(y \mid x) = \sqrt{\frac{c_{22}}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{c_{22}}{2}\left[y - b + \frac{c_{12}}{c_{22}}(x-a)\right]^2\right\}. \tag{3.6.10}$$

Comparando las fórmulas (3.6.9) y (3.6.10) con la expresión general (2.5.12) de la densidad de probabilidad normal unidimensional, llegamos a la conclusión de que la ley condicional de distribución de cada componente del vector aleatorio normalmente repartido es también normal con respecto a la otra componente; con ello, las esperanzas matemáticas condicionales y las dispersiones condicionales de las componentes X, Y del vector aleatorio (X, Y) se definen

por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} M[X \mid y] &= a - \frac{c_{12}}{c_{11}}(y-b), \quad D[X \mid y] = \frac{1}{c_{11}}, \\ M[Y \mid x] &= b - \frac{c_{12}}{c_{22}}(x-a), \quad D(Y \mid x) = \frac{1}{c_{22}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.6.11}$$

Al comparar las expresiones (3.6.5) y (3.6.7) de las densidades de probabilidad no condicionales con las (3.6.9) y (3.6.10) de las densidades de probabilidad condicionales de las componentes de un vector aleatorio normalmente repartido, se desprende que estas componentes son por lo común magnitudes aleatorias dependientes. Y solamente en caso en que $c_{12} = 0$, las componentes de un vector aleatorio bidimensional normalmente repartido son independientes.

Demos la interpretación geométrica de los resultados obtenidos. La ecuación

$$c_{11}(x-a)^2 + 2c_{12}(x-a)(y-b) + c_{22}(y-b)^2 = 2k^2. \tag{3.6.12}$$

cualquiera que sea el valor k, es la ecuación de la curva central de segundo orden con centro en el punto (a, b). Como el discriminante $D = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$ es positivo, entonces esta curva representa una elipse. Si se considera k como parámetro, a la ecuación (3.6.12) le corresponde una familia de elipses concéntricas semejantes. En todos los puntos de la elipse correspondiente al valor dado del parámetro k la densidad de probabilidad $f(x, y)$ tiene un mismo valor igual a $\sqrt{\frac{D}{\pi}}\, e^{-k^2}$. Al alejarse del centro de dispersión, es decir, al aumentar el parámetro k; la densidad de probabilidad disminuye. Debido a esto, la distribución de los valores posibles de un vector aleatorio bidimensional se puede representar geométricamente por una familia de elipses concéntricas semejantes cuya espesura disminuye, al alejarse del centro de dispersión, proporcionalmente a la magnitud e^{-k^2}. Tal cuadro de la dispersión en el plano, subordinada a la ley normal, se llama *diagrama de dispersión*.

La ecuación

$$x = a - \frac{c_{12}}{c_{11}}(y-b), \tag{3.6.13}$$

que representa gráficamente la dependencia de la esperanza matemática condicional de la magnitud X del valor y de la magnitud Y es, como es sabido de la teoría general de las curvas de segundo orden, la ecuación del diámetro de una elipse (3.6.12) conjugada con la dirección del eje x. Este diámetro divide en dos partes iguales a todas las cuerdas de la elipse y corta a la elipse en los puntos en los cuales las tangentes a ésta son paralelas al eje x (fig. 3.6.1).

De un modo absolutamente análogo la recta

$$y = b - \frac{c_{12}}{c_{22}}(x-a), \tag{3.6.14}$$

que refleja la esperanza matemática condicional de la magnitud Y

en función del valor x de la magnitud X, es el diámetro del diagrama de dispersión conjugado con la dirección del eje y. Esta recta divide en dos partes iguales a todas las cuerdas de la elipse, paralelas al eje y, y corta a la elipse en los puntos en los cuales las tangentes a esta última son paralelas al eje y (fig. 3.6.1).

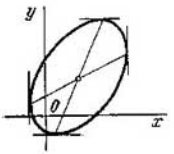


Fig. 3.6.1.

La recta (3.6.13) que representa la dependencia de la esperanza matemática condicional de la magnitud X del valor y de la magnitud Y se llama línea de regresión de la magnitud aleatoria X a Y. Análogamente la recta (3.6.14) se llama línea de regresión de la magnitud aleatoria Y a X.

Como es sabido de la teoría de las curvas de segundo orden, los ángulos de inclinación de los ejes del diagrama de dispersión (3.6.12) con respecto a los de coordenadas se determinan por la fórmula

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2c_{12}}{c_{11} - c_{22}}. \qquad (3.6.15)$$

De aquí se ve que las componentes de un vector bidimensional normalmente repartido son independientes precisamente cuando, y solamente cuando, los ejes del diagrama de dispersión son paralelos a los ejes de coordenadas.

Hallemos ahora el momento de correlación de las componentes X, Y del vector bidimensional aleatorio normalmente repartido (X, Y). Sustituyendo en la fórmula (3.4.7) la expresión (3.6.1.) de la densidad normal de probabilidad, teniendo en cuenta que las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X y Y son iguales a a y b respectivamente, y cambiando las variables $u = x - a$, $v = y - b$, obtendremos

$$k_{xy} = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uv \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[c_{11}u^2 + 2c_{12}uv + c_{22}v^2 \right] \right\} du\, dv. \qquad (3.6.16)$$

Para cumplir primeramente la integración con respecto a v, añadiremos los términos en el exponente que contienen v hasta que se obtenga un cuadrado perfecto. Para esto conviene adicionar y restar en el exponente la magnitud $\frac{c_{12}^2}{c_{22}} u^2$. Entonces obtendremos

$$k_{xy} = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u \exp\left\{ -\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{22}} u^2 \right\} du \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} v \exp\left\{ -\frac{c_{22}}{2} \left(v + \frac{c_{12}}{c_{22}} u \right)^2 \right\} dv.$$

Al sustituir las variables $t = v + \frac{c_{12}}{c_{22}} u$ en la integral interior, tendremos

$$k_{xy} = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u \exp\left\{-\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{22}} u^2\right\} du \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(t - \frac{c_{12}}{c_{22}} u\right) \exp\left\{-\frac{c_{22}}{2} t^2\right\} dt$$

o, valiéndose de las fórmulas (2.5.2) y (2.5.3),

$$k_{xy} = -\sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2\pi c_{22}}} \frac{c_{12}}{c_{22}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left\{-\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{22}} u^2\right\} du.$$

Ahora, aplicando la fórmula (2.5.4), obtendremos

$$k_{xy} = -\sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2\pi c_{22}}} \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{\sqrt{2\pi c_{22}^3}}{\sqrt{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)^3}}.$$

Después de efectuar las simplificaciones correspondientes, obtendremos definitivamente

$$k_{xy} = -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \tag{3.6.17}$$

Esta fórmula muestra que las componentes de un vector aleatorio bidimensional normalmente repartido están no correlacionadas si, y sólo si $c_{12} = 0$. Pero anteriormente vimos que la igualdad $c_{12} = 0$ es necesaria y suficiente para que las componentes de un vector aleatorio bidimensional normalmente repartido sean independientes. Ahora bien, las componentes de un vector aleatorio bidimensional normalmente repartido están no correlacionadas precisamente si, y sólo si, son independientes.

La segunda fórmula de (3.6.6), la segunda fórmula de (3.6.8) y la fórmula (3.6.17) se pueden considerar como ecuaciones con las incógnitas c_{11}, c_{12} y c_{22}. Para resolver estas ecuaciones, multiplicaremos miembro a miembro las segundas fórmulas de (3.6.6) y (3.6.8) y de la fórmula obtenida restaremos la fórmula (3.6.17) elevada al cuadrado. Como resultado obtendremos

$$D_x D_y - k_{xy}^2 = \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \tag{3.6.18}$$

Dividiendo por esta fórmula, miembro a miembro, la segunda fórmula de (3.6.8), la segunda fórmula de (3.6.6) y la fórmula (3.6.17),

después de simplificar, obtendremos

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= \frac{D_y}{D_x D_y - k_{xy}^2}, \\ c_{12} &= -\frac{k_{xy}}{D_x D_y - k_{xy}^2}, \\ c_{22} &= \frac{D_x}{D_x D_y - k_{xy}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.6.19}$$

Así pues, basta conocer las dispersiones y el momento de correlación de las componentes de un vector aleatorio bidimensional normalmente distribuido para determinar por completo todos los coeficientes en la expresión de la densidad de probabilidad del mismo.

Es evidente que no es suficiente conocer solamente las dispersiones D_x y D_y para determinar la densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes aleatorias X, Y. Por consiguiente, como muestra el ejemplo de las magnitudes aleatorias normalmente repartidas, no basta conocer las densidades de probabilidad de las magnitudes aleatorias, tomadas por separado, para determinar su densidad conjunta de probabilidad.

Sustituyendo las expresiones (3.6.19) en la fórmula (3.6.1) y teniendo en cuenta que las magnitudes a y b representan las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X, Y respectivamente, obtendremos

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x D_y - k_{xy}^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{D_y (x-m_x)^2 - 2k_{xy}(x-m_x)(y-m_y) + D_x (y-m_y)^2}{2(D_x D_y - k_{xy}^2)}\right\}. \tag{3.6.20}$$

§ 3.7. Magnitudes aleatorias complejas

Hasta ahora hemos examinado solamente las magnitudes aleatorias reales, lo que es suficiente para las aplicaciones prácticas. Sin embargo, durante la determinación de las funciones características de las magnitudes aleatorias reales ya hemos encontrado las magnitudes aleatorias complejas $Y = e^{i\lambda X}$ y $Z = e^{i[\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n]}$. Así pues, en la Teoría de las Probabilidades conviene examinar no solamente las magnitudes aleatorias reales sino también las complejas. En los capítulos ulteriores, al estudiar la teoría de funciones aleatorias, tendremos que calcular las esperanzas matemáticas, dispersiones y momentos de correlación de las magnitudes aleatorias complejas. Por eso deberemos extender las nociones de esperanza matemática, dispersión y momento de correlación a las magnitudes aleatorias complejas.

Se llama magnitud aleatoria compleja a tal magnitud aleatoria cuyos valores posibles son números complejos. La magnitud aleato-

ria compleja Z se puede representar en la forma

$$Z = X + iY, \tag{3.7.1}$$

Donde X y Y son magnitudes aleatorias reales e $i = \sqrt{-1}$. A un conjunto cualquiera de valores posibles x, y de las magnitudes aleatorias X, Y le corresponde un número complejo $z = x + iy$ que es un valor posible de la magnitud aleatoria compleja Z.

Considerando la magnitud aleatoria compleja como función de dos magnitudes aleatorias reales X, Y, se puede aprovechar la fórmula (3.4.2) para el cálculo de la esperanza matemática de la magnitud aleatoria Z. Como resultado obtendremos

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - iy) f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)\, dx\, dy + i \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)\, dx\, dy$$

o bien

$$M[Z] = M[X] + iM[Y]. \tag{3.7.2}$$

Pues bien, la esperanza matemática de una magnitud aleatoria compleja es igual al número complejo cuyas partes real e imaginaria son iguales respectivamente a las esperanzas matemáticas de las partes real e imaginaria de esta magnitud.

Al hacerse extensiva la noción de dispersión a las magnitudes aleatorias complejas, es natural que se tiende a conservar la propiedad principal de la dispersión: la positividad esencial. De acuerdo con esto, se llama dispersión de la magnitud aleatoria compleja $Z = X + iY$ a la esperanza matemática del cuadrado del módulo de la correspondiente magnitud aleatoria centrada:

$$D[Z] = M[\,|\,Z - m_z\,|^2] = M[\,|\,Z^0\,|^2]. \tag{3.7.3}$$

Teniendo en cuenta que $|\,Z^0\,|^2 = (X^0)^2 + (Y^0)^2$, se puede escribir

$$D[Z] = M[(X^0)^2 + (Y^0)^2].$$

Pero, como veremos en el párrafo siguiente, la esperanza matemática de la suma de magnitudes aleatorias es siempre igual a la suma de sus esperanzas matemáticas (el teorema de adición de esperanzas matemáticas). Por eso

$$D[Z] = M[(X^0)^2] + M[(Y^0)^2].$$

El primer sumando del segundo miembro representa la dispersión de la magnitud aleatoria X y el segundo sumando, la dispersión de la magnitud aleatoria Y. Por consiguiente,

$$D[Z] = D[X] + D[Y]. \tag{3.7.4}$$

Ahora bien, la dispersión de una magnitud aleatoria compleja es igual a la suma de las dispersiones de las partes real e imaginaria de la misma.

De la definición del momento de correlación (3.4.7) de una magnitud aleatoria real se deduce que el momento de correlación de una magnitud aleatoria consigo misma es igual a su dispersión. Al hacerse extensiva la noción de momento de correlación a las magnitudes aleatorias complejas, es natural que se tienda a conservar esta propiedad. De acuerdo con lo dicho, el momento de correlación de las magnitudes aleatorias complejas

$$X = X_1 + iX_2, \quad Y = Y_1 + iY_2 \tag{3.7.5}$$

se determina por la fórmula

$$k_{xy} = M[X^0\overline{Y}^0]. \tag{3.7.6}$$

En el caso particular cuando se trata de las magnitudes aleatorias reales X y Y, esta definición del momento de correlación coincide con la dada en el § 3.4.

El momento de correlación de las magnitudes aleatorias complejas se puede expresar por medio de los momentos de correlación de las partes reales e imaginarias de las mismas. En efecto, de acuerdo con el teorema de adición de las esperanzas matemáticas

$$M[X^0\overline{Y}^0] = M[(X_1^0 + iX_2^0)(Y_1^0 - iY_2^0)] =$$
$$= M[X_1^0Y_1^0] + M[X_2^0Y_2^0] + M[iX_2^0Y_1^0] - M[iX_1^0Y_2^0].$$

Pero, como veremos en el párrafo siguiente, la magnitud constante se puede sacar del signo de esperanza matemática. Por eso, sacando del signo de esperanza matemática la unidad imaginaria i, obtendremos

$$M[X^0\overline{Y}^0] = M[X_1^0Y_1^0] + M[X_2^0Y_2^0] + iM[X_2^0Y_1^0] - iM[X_1^0Y_2^0]$$

o bien

$$k_{xy} = k_{x_1y_1} + k_{x_2y_2} + i(k_{x_2y_1} - k_{x_1y_2}). \tag{3.7.7}$$

Hemos deducido las fórmulas (3.7.4) y (3.7.7), valiéndonos de ciertas propiedades de las esperanzas matemáticas que se establecerán en el párrafo siguiente. Está claro que luego, no debemos aplicar las fórmulas (3.7.4) y (3.7.7) al demostrar las propiedades de las esperanzas matemáticas.

Para evitar la confusión, convengamos en que en lo sucesivo examinaremos, como regla, las magnitudes aleatorias reales y siempre indicaremos especialmente cuando se trate de las magnitudes aleatorias complejas.

§ 3.8. Propiedades de las esperanzas matemáticas

Estudiemos ahora las propiedades fundamentales de las esperanzas matemáticas. En este caso, para la universalidad, consideremos que las magnitudes aleatorias que se examinan y todos los números que se encuentran pueden ser tanto reales como complejos. Esto nos concederá el derecho de aplicar todas las fórmulas obtenidas a las magnitudes aleatorias complejas, lo que necesitaremos en los capítulos sucesivos al estudiar la teoría de las funciones aleatorias.

La esperanza matemática de cualquier magnitud no aleatoria es igual a la propia magnitud

$$M[c] = c, \tag{3.8.1}$$

En efecto, la magnitud no aleatoria c tiene un solo valor posible c y la probabilidad de que tome este valor es igual a la unidad. Por eso, aplicando la fórmula (2.3.14), obtendremos precisamente la fórmula (3.8.1).

La esperanza matemática del producto de una magnitud no aleatoria por una aleatoria es igual al producto de la primera magnitud por la esperanza matemática de la segunda:

$$M[cZ] = cM[Z]. \tag{3.8.2}$$

Con otras palabras, la magnitud no aleatoria se puede sacar del signo de esperanza matemática. En efecto,

$$M[cZ] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(x+iy) f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+iy) f(x, y)\, dx\, dy = cM[Z].$$

La esperanza matemática de la suma de las magnitudes aleatorias es igual a la suma de sus esperanzas matemáticas

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y]. \tag{3.8.3}$$

Primeramente demostraremos esta propiedad para las magnitudes aleatorias reales. En este caso, en virtud de la fórmula (3.4.2)

$$M[X+Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)\, dx\, dy.$$

Aquí el primer sumando representa la esperanza matemática de la magnitud aleatoria X y el segundo, la esperanza matemática de la magnitud aleatoria Y. Así pues, para las magnitudes aleatorias reales la fórmula (3.8.3) queda demostrada. Supongamos ahora que X y Y sean magnitudes aleatorias complejas:

$$X = X_1 + iX_2, \quad Y = Y_1 + iY_2, \tag{3.8.4}$$

donde X_1, X_2, Y_1 y Y_2 son magnitudes aleatorias reales. En virtud de (3.7.2) tenemos

$$M[X + Y] = M[X_1 + Y_1 + i(X_2 + Y_2)] = \\ = M[X_1 + Y_1] + iM[X_2 + Y_2]. \tag{3.8.5}$$

Puesto que para las magnitudes aleatorias reales la fórmula (3.8.3) ya ha sido demostrada, entonces

$$M[X_1 + Y_1] = M[X_1] + M[Y_1],$$
$$M[X_2 + Y_2] = M[X_2] + M[Y_2].$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.8.5) y volviendo a aplicar la fórmula (3.7.2), obtendremos

$$M[X + Y] = M[X_1] + M[Y_1] + i\{M[X_2] + M[Y_2]\} = \\ = M[X_1] + iM[X_2] + M[Y_1] + iM[Y_2] = \\ = M[X_1 + iX_2] + M[Y_1 + iY_2] = M[X] + M[Y], \tag{3.8.6}$$

que es lo que se trataba de demostrar. Así pues, la fórmula (3.8.3) está demostrada para cualesquiera magnitudes aleatorias.

Valiéndose del método de la inducción matemática, esta propiedad de las esperanzas matemáticas puede hacerse extensiva a cualquier número de magnitudes aleatorias reales o complejas $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$:

$$M\left[\sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu\right] = \sum_{\nu=1}^{n} M[Z_\nu]. \tag{3.8.7}$$

Las fórmulas (3.8.3) y (3.8.7) enuncian el teorema de adición de las esperanzas matemáticas: La esperanza matemática de la suma de magnitudes aleatorias es igual a la suma de sus esperanzas matemáticas.

La esperanza matemática de una función lineal de las aleatorias

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu Z_\nu + b \tag{3.8.8}$$

es igual a la misma función de las esperanzas matemáticas de estas magnitudes:

$$m_u = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu m_{z_\nu} + b. \tag{3.8.9}$$

En efecto, según las propiedades deducidas de las esperanzas matemáticas

$$M[U] = M\left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu Z_\nu + b\right] = \sum_{\nu=1}^{n} M[a_\nu Z_\nu] + M[b] = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu M[Z_\nu] + b$$

que es lo que demuestra la fórmula (3.8.9)

Supongamos ahora que X e Y son dos magnitudes aleatorias arbitrarias, escalares o vectoriales, con componentes reales (las magnitudes aleatorias complejas siempre se pueden considerar como vectores aleatorios bidimensionales con componentes reales). Sea $\varphi(X, Y)$ la función unívoca de las magnitudes aleatorias X, Y. Según la definición (3.4.2)

$$M[\varphi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$$

donde $f(x, y)$ es la densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes aleatorias X, Y. Expresando esta densidad de probabilidad por la densidad de probabilidad de la magnitud X y por la densidad condicional de probabilidad de la magnitud Y, según el teorema de multiplicación de densidades de probabilidad (3.2.10), obtendremos

$$M[\psi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f_1(x) f_2(y \mid x)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f_2(y \mid x)\, dy\right] f_1(x)\, dx.$$

La integral interior representa la esperanza matemática condicional de la función $\varphi(x, Y)$ de la magnitud aleatoria Y para el valor dado x de la magnitud aleatoria X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f_2(y \mid x)\, dy = M[x, Y) \mid x]. \qquad (3.8.10)$$

Por consiguiente,

$$M[\varphi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} M[\varphi(x, Y) \mid x] f_1(x)\, dx. \qquad (3.8.11)$$

La magnitud $M[\varphi(x, Y) \mid x]$ depende del valor x de la magnitud aleatoria X. Por eso la magnitud $M[\varphi(X, Y) \mid X]$ representa la función de la magnitud aleatoria X: $M[\varphi(X, Y) \mid X] = \psi(X)$. La integral en la fórmula (3.8.11) representa la esperanza matemá-

tica de esta función:

$$\int_{-\infty}^{\infty} M[\varphi(x, Y) \mid x] f_1(x)\, dx = M[M[\varphi(X, Y) \mid X]].$$

Por lo tanto,

$$M[\varphi(X, Y)] = M[M[\varphi(X, Y) \mid X]]. \qquad (3.8.12)$$

Esta fórmula demuestra que la esperanza matemática de la función de dos magnitudes aleatorias (escalares o vectoriales) se puede calcular no a la vez sino consecutivamente: primeramente se halla la esperanza matemática condicional, considerando fijado el valor de una de las magnitudes aleatorias, y luego se halla la esperanza matemática de la así obtenida función de esta magnitud aleatoria. Esta propiedad de las esperanzas matemáticas se utiliza frecuentemente en las aplicaciones prácticas.

Ejemplo 3.8.1. Hallar la esperanza matemática del producto de las componentes X, Y de un vector aleatorio bidimensional normalmente repartido. Según la fórmula (3.8.12) hallamos primeramente la esperanza matemática condicional del producto XY para el valor fijado x de la magnitud aleatoria X. En virtud de (3.8.2), al calcular esta esperanza matemática condicional, el valor x de la magnitud aleatoria X se puede sacar del signo de la esperanza matemática. Entonces obtendremos

$$M[xY \mid x] = xM[Y \mid x].$$

Sustituyendo aquí la expresión de la esperanza matemática condicional de la magnitud aleatoria Y de (3.6.11), obtenida en el § 3.6, hallaremos

$$M[xY \mid x] = x\left[b - \frac{c_{12}}{c_{22}}(x-a)\right].$$

Sustituyendo aquí x por la magnitud aleatoria X, obtendremos la función de la magnitud aleatoria X:

$$\psi(X) = M[XY \mid X] = X\left[b - \frac{c_{12}}{c_{22}}(X-a)\right].$$

Luego, por la fórmula (3.8.12), hallaremos

$$M[XY] = M[M[XY \mid X]] = M\left[X\left[b - \frac{c_{12}}{c_{22}}(X-a)\right]\right]$$

o bien, aplicando las propiedades de las esperanzas matemáticas, determinadas más arriba,

$$M[XY] = \left(b + \frac{c_{12}}{c_{22}}a\right) M[X] - \frac{c_{12}}{c_{22}} M[X^2].$$

En el § 3.6 vimos que $M[X] = a$ y en el § 2.3 se demostró que $M[X^2] = \alpha_2 = m_x^2 + D_x$ [fórmula (2.3.11)]. Por eso, teniendo en cuenta que $m_x = a$ y aplicando la fórmula (3.6.6) para D_x, obtendremos definitivamente

$$M[XY] = \left(b + \frac{c_{12}}{c_{22}}a\right) a - \frac{c_{12}}{c_{22}} a^2 - \frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} = ab - \frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$

o bien, aplicando la fórmula (3.6.17) para el momento de correlación de las componentes,

$$M[XY] = ab + k_{xy} = m_x m_y + k_{xy}.$$

Hemos deducido esta fórmula para el caso en que X y Y representan las componentes del vector aleatorio normalmente repartido, para ilustrar la aplicación de la fórmula (3.8.12). En el párrafo siguiente deduciremos esta fórmula para las magnitudes aleatorias reales arbitrarias, empleando un procedimiento considerablemente más sencillo.

§ 3.9. Propiedades de las dispersiones y de los momentos de correlación

Ahora vamos a estudiar las propiedades de las dispersiones y de los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias. En este caso, como en el párrafo anterior, consideraremos que, en lo general, todas las magnitudes aleatorias y los números que se examinan pueden ser complejos. Esto es necesario para el estudio de la teoría de las funciones aleatorias en los capítulos sucesivos.

De las propiedades de las esperanzas matemáticas se deriva directamente que la dispersión de cualquier magnitud no aleatoria es igual a cero y el momento de correlación de dos magnitudes no aleatorias es igual a cero. Lo mismo el momento de correlación de cualquier magnitud no aleatoria con la aleatoria es siempre igual a cero, porque de la primera propiedad de las esperanzas matemáticas se deduce que la magnitud no aleatoria centrada siempre es igual a cero.

La dispersión del producto de una magnitud aleatoria por otra no aleatoria es igual al producto de la dispersión de la magnitud aleatoria por el cuadrado del módulo de la no aleatoria:

$$D[cX] = |c|^2 D[X]. \tag{3.9.1}$$

En efecto,

$$D[cX] = M[|cX - M[cX]|^2] = |c|^2 M[|X - m_x|^2] = |c|^2 D[X].$$

Análogamente se demuestra que el momento de correlación de las magnitudes aleatorias

$$U = aX, \quad V = bY, \tag{3.9.2}$$

donde a y b son números complejos arbitrarios y X y Y son magnitudes aleatorias, se determina por la fórmula

$$k_{uv} = a\bar{b}\, k_{xy}. \tag{3.9.3}$$

Si las magnitudes aleatorias U y V representan funciones lineales de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$,

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu X_\nu + b, \quad V = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu X_\nu + d, \tag{3.9.4}$$

entonces la dispersión de la magnitud aleatoria U y el momento de correlación de las magnitudes aleatorias U y V se determinan por las fórmulas:

$$D_u = \sum_{\nu,\,\mu=1}^{n} a_\nu \bar{a}_\mu k_{\nu\mu}, \tag{3.9.5}$$

$$k_{uv} = \sum_{\nu,\,\mu=1}^{n} a_\nu \bar{c}_\mu k_{\nu\mu}, \tag{3.9.6}$$

donde $k_{\nu\mu}$ es el momento de correlación de las magnitudes aleatorias X_ν, X_μ (cuando $\mu = \nu$, la magnitud $k_{\nu\nu}$ representa la dispersión de la magnitud aleatoria X_ν). En efecto,

$$D[U] = M[|U^0|^2] = M\left[\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu X_\nu^0\right|^2\right] =$$

$$= M\left[\sum_{\mu,\,\nu=1}^{n} a_\nu \bar{a}_\mu X_\nu^0 \bar{X}_\mu^0\right] = \sum_{\nu,\,\mu=1}^{n} a_\nu \bar{a}_\mu M[X_\nu^0 \bar{X}_\mu^0] = \sum_{\nu,\,\mu=1}^{n} a_\nu \bar{a}_\mu k_{\nu\mu}.$$

De un modo semejante se demuestra también la fórmula (3.9.6).

En el caso particular, cuando se trata de magnitudes aleatorias no correlacionadas $X_1, \ldots, X_n$, las magnitudes $k_{\nu\mu}$ con distintos índices son iguales a cero y las fórmulas (3.9.5) y (3.9.6) toman la forma

$$D_u = \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^2 D_\nu, \tag{3.9.7}$$

$$k_{uv} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \bar{c}_\nu D_\nu, \tag{3.9.8}$$

donde $D_\nu = k_{\nu\nu}$ es la dispersión de la magnitud aleatoria X_ν ($\nu = 1, \ldots, n$).

En las aplicaciones prácticas tiene importancia un caso particular más, referente a la fórmula (3.9.5), cuando la magnitud U representa la suma de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$.

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu, \tag{3.9.9}$$

Es evidente que en este caso $a_\nu = 1$ ($\nu = 1, \ldots, n$), $b = 0$ y la fórmula (3.9.5) tomará la forma

$$D[U] = \sum_{\nu,\,\mu=1}^{n} k_{\nu\mu}. \tag{3.9.10}$$

Ahora bien, la dispersión de la suma de las magnitudes aleatorias es igual a la suma de todas las dispersiones y los momentos de correlación de los sumandos.

En el caso particular, cuando las magnitudes $X_1, \ldots, X$ no están correlacionadas, la fórmula (3.9.10) toma la forma

$$D[U] = \sum_{v=1}^{n} D_v. \tag{3.9.11}$$

Así pues, la dispersión de la suma de las magnitudes aleatorias no correlacionadas es igual a la suma de las dispersiones de los sumandos. Teniendo en cuenta que $D[U] = \sigma_u^2$, y $D_v = \sigma_v^2$, donde $\sigma_u, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ son las desviaciones cuadráticas medias de las magnitudes aleatorias $U, X_1, \ldots, X_n$, respectivamente, podemos escribir la fórmula (3.9.11) en la forma

$$\sigma_u^2 = \sum_{v=1}^{n} \sigma_v^2. \tag{3.9.12}$$

Las fórmulas (3.9.7), (3.9.8), (3.9.11) y (3.9.12) son aplicables para cualesquiera magnitudes aleatorias no correlacionadas. En particular, son válidas para las magnitudes aleatorias independientes.

Calculemos ahora la esperanza matemática del producto de las magnitudes X e $\overline{Y}$ para las magnitudes aleatorias arbitrarias X e Y (el momento inicial mixto de segundo orden). Representando las magnitudes aleatorias centradas, en virtud de las propiedades de las esperanzas matemáticas, obtendremos

$$M[X\overline{Y}] = M[(m_x + X^0)(\overline{m}_y + \overline{Y}^0)] = m_x\overline{m}_y + M[X\overline{Y}^0],$$

o bien

$$M[X\overline{Y}] = m_x\overline{m}_y + k_{xy}. \tag{3.9.13}$$

En el caso particular, cuando se trata de las magnitudes aleatorias no correlacionadas reales X e Y, la fórmula (3.9.13) toma la forma

$$M[XY] = m_x m_y. \tag{3.9.14}$$

Esto es el así llamado teorema de multiplicación de las esperanzas matemáticas: la esperanza matemática del producto de dos magnitudes aleatorias no correlacionadas reales es igual al producto de las esperanzas matemáticas de las mismas. A diferencia del teorema de adición, el de multiplicación es válido solamente para las magnitudes aleatorias no correlacionadas reales. En particular, es válido también para las magnitudes aleatorias reales independientes.

Demostremos también que el momento de correlación de las magnitudes aleatorias satisface la desigualdad

$$|k_{xy}| \leqslant \sqrt{D_x D_y}. \tag{3.9.15}$$

Para la demostración nos valemos de la propiedad de la dispersión no negativa. Para cualesquiera magnitudes aleatorias X, Y y números no aleatorios a y b, la dispersión de la magnitud aleatoria $a\,X - b\,Y$ no puede ser negativa:

$$D\,[aX - bY] \geqslant 0. \tag{3.9.16}$$

Aplicando la fórmula (3.9.5) y teniendo en cuenta que en el caso dado $n = 2$, $a_1 = a$, $a_2 = -b$, obtendremos

$$D\,[aX - bY] = |a|^2 D_x + |b|^2 D_y - a\bar{b}k_{xy} - \bar{a}bk_{yx}. \tag{3.9.17}$$

Observemos ahora que

$$k_{yx} = M\,[Y^0\bar{X}^0] = \bar{k}_{xy}, \tag{3.9.18}$$

es decir, al cambiar el orden de las magnitudes aleatorias complejas, el momento de correlación pasa a la magnitud conjugada compleja. Teniendo esto en consideración y sustituyendo la expresión (3.9.17) en (3.9.16), obtendremos para cualesquiera a y b

$$|a|^2 D_x + |b|^2 D_y - a\bar{b}k_{xy} - \bar{a}b\bar{k}_{xy} \geqslant 0. \tag{3.9.19}$$

Ahora, aprovechando que a y b son arbitrarias, hagamos

$$a = \bar{k}_{xy}, \quad b = D_x \tag{3.9.20}$$

Entonces, a desigualdad (3.9.19) tomará la forma

$$|k_{xy}|^2 D_x + D_x^2 D_y - D_x |k_{xy}|^2 - D_x |k_{xy}|^2 \geqslant 0$$

o bien

$$D_x (D_x D_y - |k_{xy}|^2) \geqslant 0. \tag{3.9.21}$$

De aquí se ve que para $D_x > 0$

$$D_x D_y - |k_{xy}|^2 \geqslant 0,$$

de donde se deduce la desigualdad (3.9.15). Cuando $D_x = 0$, la magnitud aleatoria centrada X^0 es igual a cero con la probabilidad equivalente a la unidad, debido a lo cual $k_{xy} = M\,[X^0Y^0] = 0$, es decir, también (3.9.15) se satisface.

Sustituyendo en la desigualdad (3.9.15) las raíces de las dispersiones por las desviaciones cuadráticas medias, podemos escribirla en la forma

$$|k_{xy}| \leqslant \sigma_x \sigma_y. \tag{3.9.22}$$

De las desigualdades (3.9.15) y (3.9.22), así como de la definición del coeficiente de correlación (3.4.9) se desprende que para cualesquiera magnitudes aleatorias el coeficiente de correlación no excede en módulo a la unidad:

$$|r_{xy}| \leqslant 1. \tag{3.9.23}$$

De los cálculos citados se ve que el signo de igualdad en las fórmulas (3.9.16), (3.9.19), (3.9.21) y, por consiguiente, también en las (3.9.15), (3.9.22) y (3.9.23) es válido si, y sólo si, la dispersión de la magnitud $aX - bY$, para los valores elegidos de los coeficientes a y b, es igual a cero. Pero esto, a su vez, es posible solamente cuando la magnitud centrada $aX^0 - bY^0$ con probabilidad equivalente a la unidad es igual a cero. Ahora bien, en todas las fórmulas escritas el signo de igualdad es válido si y sólo si, entre las magnitudes X e Y existe dependencia funcional lineal del tipo

$$\overline{k}_{xy}X^0 - D_xY^0 = 0. \qquad (3.9.24)$$

Esto permite obtener cierta idea de qué es lo que caracteriza el coeficiente de correlación r_{xy}. El coeficiente de correlación caracteriza, por decirlo así, el grado de aproximación de la dependencia entre las magnitudes aleatorias a la dependencia funcional lineal. En el caso de dependencia lineal el módulo del coeficiente de correlación es exactamente igual a la unidad: $|r_{xy}| = 1$. Si $|r_{xy}| = 0$, no puede existir dependencia lineal entre las magnitudes aleatorias. Los valores de $|r_{xy}|$ comprendidos entre el cero y la unidad determinan hasta qué punto la dependencia entre las magnitudes aleatorias es próxima a la dependencia funcional lineal.

Ejemplo 3.9.1. Hallar la esperanza matemática y la dispersión de la frecuencia de un acontecimiento para n pruebas independientes realizadas en iguales condiciones.

Designemos por X_ν el número de veces que sucede el acontecimiento A como resultado de la ν-ésima prueba. Calculemos la esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria X_ν. Esta magnitud tiene dos valores posibles: 0 y 1, cuyas probabilidades son $q = 1 - p$ y p, respectivamente. Por lo tanto, aplicando la fórmula (2.3.14), obtendremos

$$m_{x_\nu} = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Así pues, la esperanza matemática del número de veces que se produce un acontecimiento al efectuar un solo experimento es siempre igual a la probabilidad de este acontecimiento. Aprovechando la fórmula (2.3.15), hallamos la dispersión de la magnitud aleatoria X_ν

$$D_{x_\nu} = (0 - m_{x_\nu})^2 q + (1 - m_{x_\nu})^2 p = p^2q + q^2p = pq(p + p) = pq$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Según la definición, la frecuencia U de un acontecimiento A representa la relación del número de veces que sucede el acontecimiento A, el cual, evidentemente, es igual al número de veces que se produce éste en cada una de las pruebas, al número total de experimentos realizados:

$$U = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu.$$

Esta fórmula muestra que la frecuencia del acontecimiento A es una combinación lineal de las magnitudes aleatorias independientes $X_1, \ldots, X_n$ que representan los números de veces que ocurre el acontecimiento A en cada una de las pruebas

realizadas. Por consiguiente, para determinar la esperanza matemática de la frecuencia U se puede hacer uso de la fórmula (3.8.9). Teniendo en cuenta que en este caso todos los coeficientes a_ν son iguales a $1/n$ y el término independiente b es igual a cero, obtendremos

$$m_U = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} m_{X_\nu} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} p = p. \tag{3.9.25}$$

Así pues, la esperanza matemática de la frecuencia de un acontecimiento es igual a la probabilidad de este último. Para determinar la dispersión de la frecuencia, apliquemos la fórmula (3.9.7). Como resultado obtendremos

$$D_U = \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} D_{X_\nu} = \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} pq = \frac{pq}{n}. \tag{3.9.26}$$

De los resultados obtenidos se puede sacar la deducción práctica siguiente: la esperanza matemática de la frecuencia, cualquiera que sea el número de pruebas, es igual a la probabilidad del acontecimiento, y la dispersión de la frecuencia tiende a cero al aumentar ilimitadamente el número de experimentos. Ahora bien, cuando el número de pruebas es lo suficiente grande, prácticamente los valores posibles de la frecuencia de producción de un acontecimiento están comprendidos en límites tan estrechos como se quiera. Por eso, al ser grande el número de experimentos, podemos tomar la frecuencia con que se produce un acontecimiento por la probabilidad del acontecimiento. La expresión (3.9.26) para la dispersión de la frecuencia nos permite estimar de un modo aproximado la precisión con que la frecuencia se acerca a la probabilidad. Para obtener que la frecuencia de un acontecimiento se aproxime de un modo suficientemente exacto a la probabilidad del mismo, prácticamente bastan algunas decenas de pruebas (70-100) siempre que la probabilidad del acontecimiento no sea próxima al cero o a la unidad.

Los resultados obtenidos son una consecuencia directa de la definición y las propiedades de las probabilidades de acontecimientos, así como de la teoría desarrollada sobre la base de estas definiciones y propiedades. Así pues, de las leyes de la Teoría de las Probabilidades se deduce la propiedad de estabilidad de las frecuencias de acontecimientos que se observa en la práctica. Por consiguiente, los conceptos puestos como base de la Teoría de las Probabilidades dan la posibilidad de describir correctamente las propiedades de los fenómenos aleatorios frecuentes que se observan en la práctica. Por eso la Teoría de las Probabilidades se puede aplicar a los problemas de la práctica, estando en este caso seguros de que las deducciones obtenidas con ayuda de esta Teoría son exactas.

Ejemplo 3.9.2. Examinemos ahora una magnitud aleatoria X. Supongamos que se realizan n experimentos independientes en iguales condiciones y que en cada uno de éstos se registra el valor que toma la magnitud aleatoria X. Luego, según los datos obtenidos como resultado de las pruebas, se calcula el valor medio aritmético de la magnitud X. Designemos por X_ν el valor que la magnitud aleatoria X toma en la ν-ésima prueba. Es evidente que antes de que los experimentos hayan sido efectuados, de hecho, este valor es una magnitud aleatoria, debido a lo cual el valor medio aritmético de la magnitud X, al llevar a cabo n experimentos,

$$U = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu$$

también es una magnitud aleatoria. Según los datos del problema, $X_1, \ldots, X_n$ son magnitudes aleatorias independientes con igual esperanza matemática m_x

e igual dispersión D_x. Aplicando las fórmulas (3.8.9) y (3.9.7), hallemos la esperanza matemática y la dispersión del valor medio aritmético de la magnitud aleatoria X al efectuar n experimentos:

$$m_u = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} m_x = m_x, \qquad D_u = \frac{1}{n^2}\sum_{v=1}^{n} D_x = \frac{D_x}{n}. \tag{3.9.27}$$

Del ejemplo examinado se desprende que la esperanza matemática del valor medio aritmético de una magnitud aleatoria, cualquiera que sea el número de experimentos independientes, es igual a la esperanza matemática de esta magnitud, y la dispersión de la media aritmética es inversamente proporcional al número de experimentos realizados n. Por lo tanto, al ser el número de experimentos n lo suficiente grande, las desviaciones prácticamente posibles del valor medio aritmético de una magnitud aleatoria con respecto a su esperanza matemática estarán comprendidas en límites tan estrechos como se quiera. Esto da la posibilidad de determinar las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias según los resultados de las pruebas, tomando sus valores medios aritméticos, cuando el número de experimentos es lo suficiente grande, por las esperanzas matemáticas. Y como los momentos de las magnitudes aleatorias son las esperanzas matemáticas de ciertas funciones de estas magnitudes, entonces cualesquiera momentos de las magnitudes aleatorias se pueden determinar como los valores medios correspondientes, si el número de experimentos es lo suficiente grande. En particular, las dispersiones estadísticas de las magnitudes aleatorias se pueden tomar por las dispersiones de las mismas y los correspondientes momentos de correlación estadísticos, por los momentos de correlación.

Las tesis deducidas en los ejemplos considerados son los teoremas más sencillos de una gran cantidad de teoremas que entran en la parte especial de la Teoría de las Probabilidades que se llama corrientemente *ley de grandes números*. La ley de grandes números determina por vía teórica, partiendo de los conceptos fundamentales de la Teoría de las Probabilidades, las propiedades de los fenómenos aleatorios frecuentes que se observan en la práctica. Ahora bien, la ley de grandes números fundamenta la validez de las tesis principales de la Teoría de las Probabilidades y la posibilidad de la aplicación práctica de esta teoría.

§ 3.10. Determinación de los momentos de las funciones de las magnitudes aleatorias

En la práctica surge frecuentemente el problema de determinar los momentos de una magnitud aleatoria Y cuando vienen dadas las características probabilísticas de otra magnitud aleatoria X con la cual la magnitud Y está ligada por una dependencia funcional determinada:

$$Y = \varphi(X), \tag{3.10.1}$$

donde φ es una función unívoca completamente determinada. En los dos párrafos anteriores este problema fue resuelto para el caso de una función lineal φ. En el caso general, para determinar los momentos de la magnitud aleatoria Y, es necesario conocer la ley de distri-

bución de la magnitud aleatoria X. Entonces, todos los momentos de la magnitud aleatoria Y que nos interesan pueden ser determinados por las fórmulas (2.3.4) y (3.4.2).

Examinemos primeramente el caso de las magnitudes escalares X e Y. Según la definición, el momento de la magnitud aleatoria Y de orden k es la esperanza matemática de la magnitud aleatoria Y^k:

$$\alpha_k^y = M[Y^k] = M[\varphi^k(X)] \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.10.2}$$

Así pues, el cálculo de los momentos de la magnitud aleatoria Y se ha reducido al cálculo de las esperanzas matemáticas de las funciones correspondientes de la magnitud X. Aplicando la fórmula (2.3.4) para calcular la esperanza matemática de la función $\varphi^k(X)$, obtendremos

$$\alpha_k^y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x) f(x)\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.10.3}$$

Ahora bien, los momentos de la magnitud aleatoria Y, enlazada por una dependencia funcional (3.10.1) con la magnitud aleatoria X, se determinan en principio sencillamente siempre que se conozca la densidad de probabilidad de la magnitud X.

Supongamos ahora que Y es el vector aleatorio cuyas componentes $Y_1, \ldots, Y_m$ son funciones unívocas determinadas de las componentes $X_1, \ldots, X_n$ del vector aleatorio X:

$$Y_k = \varphi_k(X_1, \ldots, X_n) \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{3.10.4}$$

En este caso, aplicando la fórmula (3.4.2) (más exactamente, su generalización extendida a los vectores aleatorios polidimensionales) para calcular los momentos del vector aleatorio obtendremos

$$\begin{aligned}\alpha^{y}_{k_1, \ldots, k_m} &= M[Y_1^{k_1} \ldots Y_m^{k_m}] = \\ &= M[\varphi_1^{k_1}(X_1, \ldots, X_n) \ldots \varphi_m^{k_m}(X_1, \ldots, X_n)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^{k_1}(x_1, \ldots, x_n) \ldots \varphi_m^{k_m}(x_1, \ldots, x_n) \times \\ &\times f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \quad (k_1, \ldots, k_m = 1, 2, \ldots).\end{aligned} \tag{3.10.5}$$

Las fórmulas (3.10.3) y (3.10.5) son las fórmulas exactas para calcular los momentos de la magnitud aleatoria Y según la densidad de probabilidad preasignada de la magnitud aleatoria argumento X

Ejemplo 3.10.1. Hallar la esperanza matemática y la dispersión de la señal de salida de un elemento no lineal carente de inercia, si la señal de entrada representa la suma de una señal útil determinada s y de la perturbación X.

La señal de salida Y del elemento que se considera se expresa por la fórmula

$$Y = \varphi(s + X),$$

donde φ es la función no lineal unívoca (característica del elemento no lineal). Así pues, las señales de entrada y de salida de este elemento están ligadas por la dependencia funcional del tipo (3.10.1). Para aplicar la fórmula (3.10.3), con el fin de calcular la esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria Y, es necesario conocer la densidad de probabilidad $f(x)$ de la magnitud aleatoria X. Entonces la fórmula (3.10.3) dará

$$m_y = \alpha_1^y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s+x) f(x)\, dx, \quad \alpha_1^y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(s+x) f(x)\, dx.$$

Luego, la dispersión de la magnitud aleatoria Y se puede determinar por la fórmula (2.3.11) que expresa la dispersión por medio de los momentos iniciales α_1 y α_2:

$$D_y = \alpha_2^y - (\alpha_1^y)^2.$$

En los problemas de la automática la magnitud m_y representa de ordinario la parte útil de la señal de salida del elemento no lineal que se considera. La magnitud D_y caracteriza la influencia de la perturbación en la señal de salida, es decir, el nivel del ruido de salida del elemento.

Las fórmulas (3.10.3) y (3.10.5) son complicadas para la aplicación práctica, a pesar de que son en principio sencillas. Por eso es natural que surja la pregunta: ¿se podría sustituir estas fórmulas exactas pero complicadas por otras más sencillas aunque sean aproximadas? Resulta que en muchos problemas prácticos se puede hacer esto con ayuda de la linealización de las funciones.

En los §§ 3.8 y 3.9 vimos que si las funciones $\varphi(X)$ y $\varphi_k(X_1, \ldots, X_n)$ son lineales con respecto a sus argumentos, los momentos de estas funciones se expresan por fórmulas muy elementales que se deducen de las propiedades de las esperanzas matemáticas, dispersiones y momentos de correlación.

Para una determinación aproximada de las esperanzas matemáticas, dispersiones y momentos de correlación de las funciones no lineales derivables unívocas continuas de las magnitudes aleatorias, descompongamos estas funciones en la serie de Taylor en la vecindad de las esperanzas matemáticas $m_{x_1}, \ldots, m_{x_n}$ de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ y omitamos en las series obtenidas todos los términos superiores al primer grado. Entonces obtendremos

$$Y_\nu = \varphi_\nu(X_1, \ldots, X_n) \approx \varphi_\nu(m_{x_1}, \ldots, m_{x_n}) + \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_h}\right)_{x_i = m_{x_i}} X_h^0 \qquad (3.10.6)$$

donde $X_1^0, \ldots, X_n^0$ son las magnitudes aleatorias centradas correspondientes.

Aplicando las fórmulas (3.8.9) y (3.9.6) y teniendo en cuenta que las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias $X_1^0, \ldots, X_n^0$ son iguales a cero, obtendremos para los momentos de las

magnitudes aleatorias $Y_1, \ldots, Y_n$ las expresiones aproximadas siguientes:

$$m_{y_\nu} \approx \varphi_\nu(m_{x_1}, \ldots, m_{x_n}) \quad (\nu = 1, \ldots, m), \tag{3.10.7}$$

$$k^y_{\nu\mu} \approx \sum_{h,\, l=i}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_h}\right)_{x_i = m_{x_l}} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_l}\right)_{x_i = m_i} k^x_{hl} \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, m) \tag{3.10.8}$$

Puesto que estas fórmulas son aproximadas, surge la cuestión acerca de los límites de su aplicación práctica. Para resolver esta cuestión conviene observar que por ser las fórmulas (3.8.9) y (3.9.6) exactas

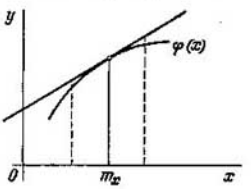


Fig. 3.10.1.

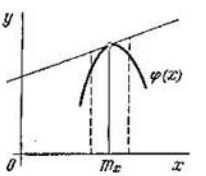


Fig. 3.10.2.

para las funciones lineales, para las funciones no lineales serán tanto más exactas cuanto más próximas sean estas funciones a las lineales en el campo de los valores prácticamente posibles de las magnitudes-argumentos $X_1, \ldots, X_n$. Por consiguiente, las fórmulas (3.10.7) y (3.10.8) son aplicables en aquel caso en que las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ son lo suficiente próximas a las lineales en el campo de los valores prácticamente posibles de las magnitudes-argumentos $X_1, \ldots, X_n$. Si estas funciones se desvían poco de las lineales en una gama considerable del cambio de sus argumentos (fig. 3.10.1), entonces las fórmulas (3.10.7) y (3.10.8) se pueden aplicar para grandes dispersiones de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$. Si estas funciones se desvían considerablemente de las lineales (fig. 3.10.2), entonces las fórmulas (3.10.7) y (3.10.8) son aplicables solamente para pequeñas dispersiones de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$.

§ 3.11. Distribución normal polidimensional*

La ley normal de distribución de un vector aleatorio n-dimensional X con las componentes $X_1, \ldots, X_n$ o bien, lo que es lo mismo, la distribución conjunta normal de n magnitudes aleatorias

*) El lector puede omitir este párrafo sin perjudicar la comprensión de casi todo lo sucesivo.

$X_1, \ldots, X_n$ se caracteriza por la densidad de probabilidad

$$f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sqrt{\frac{|C|}{(2\pi)^n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{p,\,q=1}^{n} c_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_q)\right\}. \qquad (3.11.1)$$

En esta fórmula el coeficiente adjunto a la función exponencial representa el multiplicador normalizador, elegido a razón de que la integral con respecto a todas las variables de $-\infty$ hasta ∞ sea igual a la unidad; C representa la matriz compuesta con los coeficientes c_{pq}:

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{n1} c_{n2} \ldots c_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (3.11.2)$$

y $|C|$ es el determinante de esta matriz

$$|C| = \begin{Vmatrix} c_{11} c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{n1} c_{n2} \ldots c_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (3.11.3)$$

Observemos que el producto $(x_\nu - a_\nu)(x_\mu - a_\mu)$ para cualesquiera índices ν y μ desiguales entra en la suma dos veces: una vez con el coeficiente $c_{\nu\mu}$ y otra con el coeficiente $c_{\mu\nu}$. Por eso, cualesquiera que sean los índices desiguales ν y μ, el papel esencial lo desempeña solamente la suma de los coeficientes $c_{\nu\mu} + c_{\mu\nu}$. Por consiguiente, esta suma, sin pérdida del carácter general, siempre se puede considerar dividida equivalentemente entre los sumandos y de este modo considerar que la matriz C es simétrica, es decir, que $c_{pq} = c_{qp}$ para cualesquiera p y q.

Demostremos, ante todo, que las magnitudes $X_1, \ldots, X_n$, examinadas por separado, y cualesquiera combinaciones compuestas de ellas también están normalmente repartidas. Para esto recordemos que para determinar la densidad de probabilidad de cierta parte de las magnitudes aleatorias, digamos $X_1, \ldots, X_l$ $(l < n)$, es necesario integrar la densidad conjunta de probabilidad de todas las magnitudes $X_1, \ldots, X_n$ con respecto a las variables correspondientes a las magnitudes restantes, en el caso dado con respecto a $x_{l+1}, \ldots, x_n$. En virtud de esta regla, la densidad de probabilidad de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_{n-1}$ se expresará por la

fórmula

$$f_{1,\ldots,n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) =$$

$$= \sqrt{\frac{|C|}{(2\pi)^n}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} c_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_q)\right\} dx_n. \quad (3.11.4)$$

Pero

$$\sum_{p,q=1}^{n} c_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_q) = \sum_{p,q=1}^{n-1} c_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_p) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n-1} c_{pn}(x_p - m_p)(x_n - m_n) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1} c_{nq}(x_n - m_n)(x_q - m_q) + c_{nn}(x_n - m_n)^2.$$

Teniendo en cuenta que la suma no depende de cómo están designados los índices con respecto a los cuales se realiza la adición, podemos sustituir en la tercera suma el índice de adición q por p. Entonces, teniendo en consideración que $c_{np} = c_{pn}$ y sacando el multiplicador común $x_n - m_n$ fuera del signo de adición, obtendremos

$$\sum_{p,q=1}^{n} c_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_q) = \sum_{p,q=1}^{n-1} c_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_q) +$$

$$+ 2(x_n - m_n)\sum_{p=1}^{n-1} c_{pn}(x_p - m_p) + c_{nn}(x_n - m_n)^2. \quad (3.11.5)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.11.4) y sacando el multiplicador que no depende de x_n fuera del signo integral, obtendremos después de reemplazar la variable de integración $t = x_n - m_n$

$$f_{1,\ldots,n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) =$$

$$= \sqrt{\frac{|C|}{(2\pi)^n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n-1} c_{pn}(x_p - m_p)(x_q - m_q)\right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-t\sum_{p=1}^{n-1} c_{pn}(x_p - m_p) - \frac{1}{2}c_{nn}t^2\right\} dt. \quad (3.11.6)$$

Para calcular la integral obtenida, apliquemos la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h} e^{\frac{\eta^2}{4h^2}}, \quad (3.11.7)$$

deducida en el suplemento [fórmula (1)]. Suponiendo en esta fórmula que

$$\eta = -\sum_{p=1}^{n-1} c_{pn}(x_p - m_p),\quad h^2 = \frac{1}{2}c_{nn}$$

y sustituyendo la expresión obtenida de la integral en (3.11.16) hallaremos

$$f_{1,\ldots,n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) =$$

$$= \sqrt{\frac{|C|}{(2\pi)^n}}\sqrt{\frac{2\pi}{c_{nn}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n-1} c_{pq}(x_p-m_p)(x_q-m_q) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2c_{nn}}\left[\sum_{p=1}^{n-1} c_{pn}(x_p-m_p)\right]^2\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{|C|}{(2\pi)^{n-1}c_{nn}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n-1}\left(c_{pq}-\frac{c_{pn}c_{qn}}{c_{nn}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times(x_p-m_p)(x_q-m_q)\right\}. \qquad (3.11.8)$$

Comparando esta expresión con (3.11.1), vemos que la distribución conjunta de las magnitudes $X_1, \ldots, X_{n-1}$ es normal. Puesto que esto es válido para cualquier n y la expresión (3.11.1) de la densidad normal de probabilidades es simétrica con respecto a las variables $x_1, \ldots, x_n$, nuestra afirmación está por completo demostrada.

Integrando la expresion (3.11.8) sucesivamente con respecto a x_{n-1}, x_{n-2}, x_2, hallaremos la densidad de probabilidad de una componente X_1 del vector aleatorio normalmente repartido. En este caso nos convenceremos de que la esperanza matemática de la magnitud X_1 es igual a m_1. Ahora bien, en la expresión de la densidad de probabilidad del vector aleatorio normalmente repartido, los números $m_1, \ldots, m_n$ representan las esperanzas matemáticas de las componentes del mismo $X_1, \ldots, X_n$: $m_p = m_{x_p}$ $(p = 1, \ldots, n)$.

Al dividir la expresión (3.11.1) por (3.11.8), hallaremos la densidad condicional de probabilidad de la magnitud aleatoria X_n con respecto al conjunto de las magnitudes restantes $X_1, \ldots, X_{n-1}$:

$$f_n(x_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \sqrt{\frac{c_{nn}}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} c_{pq}(x_p-m_p)(x_q-m_q) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n-1}\left(c_{pq}-\frac{c_{pn}c_{qn}}{c_{nn}}\right)(x_p-m_p)(x_q-m_q)\right\}.$$

o bien, teniendo en cuenta (3.11.5),

$$f_n(x_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \sqrt{\frac{c_{nn}}{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} c_{nn} (x_n - m_n)^2 - (x_n - m_n) \sum_{p=1}^{n-1} c_{pn} (x_p - m_p) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{p,\, q=1}^{n-1} \frac{c_{pn} c_{qn}}{c_{nn}} (x_p - m_p)(x_q - m_q) \right\}. \qquad (3.11.9)$$

Pero

$$\sum_{p,\, q=1}^{n-1} c_{pn} c_{qp} (x_p - m_p)(x_q - m_q) = \left[\sum_{p=1}^{n-1} c_{pn} (x_p - m_p) \right]^2,$$

y, por consiguiente

$$\frac{1}{2} c_{nn} (x_n - m_n)^2 + (x_n - m_n) \sum_{p=1}^{n-1} c_{pn} (x_p - m_p) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{p,\, q=1}^{n-1} \frac{c_{pn} c_{qn}}{c_{nn}} (x_p - m_p)(x_q - m_q) =$$

$$= \frac{1}{2} c_{nn} \left\{ (x_n - m_n)^2 + 2 (x_n - m_n) \sum_{p=1}^{n-1} \frac{c_{pn}}{c_{nn}} (x_p - m_p) + \right.$$

$$\left. \left[\sum_{p=1}^{n-1} \frac{c_{pn}}{c_{nn}} (x_p - m_p) \right]^2 \right\} = \frac{1}{2} c_{nn} \left[x_n - m_n + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{c_{pn}}{c_{nn}} (x_p - m_p) \right]^2.$$

Sustituyendo esta expresión en (3.11.9), obtendremos definitivamente

$$f_n(x_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sqrt{\frac{c_{nn}}{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} c_{nn} \left[x_n - m_n + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{c_{pn}}{c_{nn}} (x_p - m_p) \right]^2 \right\}. \qquad (3.11.10)$$

Esta fórmula muestra que la distribución condicional de la componente X_n del vector aleatorio normalmente repartido es normal, con ello la esperanza matemática condicional y la dispersión condicional de dicha componente son respectivamente iguales a

$$\left.\begin{aligned} M[X_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}] &= m_n - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{c_{pn}}{c_{nn}} (x_p - m_p), \\ D[X_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}] &= \frac{1}{c_{nn}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.11)$$

La primera de estas fórmulas muestra que la esperanza matemática condicional de la componente del vector aleatorio normalmente repartido es función lineal de los valores de las componentes restantes. La segunda fórmula (3.11.11) indica que la dispersión condicional de la componente del vector aleatorio normalmente repartido no depende del valor de las demás componentes.

De un modo semejante nos convencemos de que la distribución condicional de cualquier parte de las componentes del vector aleatorio normalmente repartido es, con respecto a las demás componentes, normal y las esperanzas matemáticas condicionales de las componentes son funciones lineales de los valores de las componentes restantes.

Aplicando la fórmula (3.3.21), llegaremos fácilmente a la conclusión de que cualesquiera funciones lineales de las componentes del vector aleatorio normalmente repartido están repartidas también normalmente. Esto da la posibilidad de cumplir cualesquiera transformaciones lineales de las magnitudes aleatorias normalmente repartidas y siempre obtener en este caso magnitudes aleatorias normalmente distribuidas.

Calculemos ahora las dispersiones y los momentos de correlación de las componentes de un vector aleatorio normalmente repartido. Para ello, con auxilio de la transformación lineal, reducimos el sistema de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ al sistema de las magnitudes aleatorias no correlacionadas $V_1, \ldots, V_n$, suponiendo de momento que las dispersiones y los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ son conocidas. Esto se puede hacer por una infinidad de procedimientos. El procedimiento más sencillo consiste en que se supone que

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= m_1 + V_1, \\ X_2 &= m_2 + \gamma_{21} V_1 + V_2, \\ X_3 &= m_3 + \gamma_{31} V_1 + \gamma_{32} V_2 + V_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n &= m_n + \gamma_{n1} V_1 + \gamma_{n2} V_2 + \ldots + \gamma_{n,\,n-1} V_{n-1} + V_n \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.12)$$

y se elige γ_{21} de modo tal que la magnitud V_2 no esté correlacionada con V_1; luego se eligen γ_{31} y γ_{32} de modo tal que la magnitud V_3 no esté correlacionada con V_1 y V_2, etc; y $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \ldots, \gamma_{n,\,n-1}$ de modo tal que la magnitud V_n no esté correlacionada con $V_1, \ldots, V_{n-1}$. Es evidente que, al emplear tal procedimiento, el número de coeficientes desconocidos $\gamma_{\mu\nu}$ es igual al número de condiciones que deben ser satisfechas. En este caso todos $\gamma_{\nu\mu}$ se pueden determinar fácilmente por turno.

De la primera fórmula (3.11.12) está claro que la dispersión D_1 de la magnitud aleatoria V_1 es igual a la dispersión de la magnitud $X_1 : D_1 = D_{x_1} = k_{11}$.

Para determinar el coeficiente γ_{v1}, expresemos el momento de correlación k_{v1} de las magnitudes aleatorias X_v y X_1 por la fórmula (3.9.8), considerando X_v y X_1 como funciones lineales de las magnitudes aleatorias no correlacionadas $V_1, \ldots, V_v$. Teniendo en cuenta que los coeficientes adjuntos a $V_2, \ldots, V_v$ en la expresión (3.11.12) de la magnitud X_1 son iguales a cero, y que el coeficiente adjunto a V_1 es igual a la unidad, obtendremos

$$k_{v1} = \gamma_{v1} D_1 = \gamma_{v1} k_{11}.$$

De aquí hallamos que

$$\gamma_{v1} = \frac{k_{v1}}{k_{11}}. \tag{3.11.13}$$

Así pues, todos los coeficientes $\gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n1}$ se expresan muy sencillamente por medio de los momentos de correlación $k_{21}, \ldots, k_{n1}$ de las magnitudes $X_2, \ldots, X_n$ con X_1, y mediante la dispersión k_{11} de la magnitud X_1.

Una vez determinado γ_{21}, hallamos la dispersión D_2 de la magnitud aleatoria V_2. Para esto expresemos por la fórmula (3.9.7) la dispersión $D_{x_2} = k_{22}$ de la magnitud aleatoria X_2. Teniendo en cuenta que en este caso todos los coeficientes $\gamma_{v\mu}$ son reales, obtendremos

$$k_{22} = \frac{k_{21}^2}{k_{11}^2} k_{11} + D_2 = \frac{k_{21}^2}{k_{11}} + D_2$$

De donde

$$D_2 = \frac{k_{11} k_{22} - k_{21}^2}{k_{11}}. \tag{3.11.14}$$

Para determinar γ_{v2}, expresemos por la fórmula (3.9.8) el momento de correlación k_{v2} de las magnitudes aleatorias X_v y X_2. Entonces obtendremos

$$k_{v2} = \gamma_{v1}\gamma_{21} D_1 + \gamma_{v2} D_2 = \gamma_{v1}\gamma_{21} k_{11} + \gamma_{v2} \frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{k_{11}}$$

o, teniendo en consideración (3.11.13),

$$k_{v2} = \frac{k_{v1} k_{21}}{k_{11}} + \gamma_{v2} \frac{k_{11} k_{22} - k_{21}^2}{k_{11}}.$$

De aquí hallamos

$$\gamma_{v2} = \frac{k_{11} k_{v2} - k_{v1} k_{21}}{k_{11} k_{22} - k_{21}^2} \quad (v = 3, \ldots, n). \tag{3.11.15}$$

Procediendo del mismo modo, expresemos sucesivamente los demás coeficientes γ_{v3} $(v = 4, \ldots, n), \ldots, \gamma_{n, n-1}$ por medio de las dispersiones y los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$.

Dado que las magnitudes $V_1, \ldots, V_n$ son funciones lineales de las componentes $X_1, \ldots, X_n$ del vector aleatorio normalmente repartido, todas las distribuciones de las magnitudes aleatorias $V_1, \ldots$

..., V_n, tomadas por separado y en cualesquiera combinaciones, así como todas sus distribuciones condicionales, son normales. En particular, son normales las distribuciones de todos los pares de V_ν, V_μ. Por consiguiente, en virtud de lo demostrado en el § 3.6, las magnitudes aleatorias $V_1, \ldots, V_n$ no solamente no están correlacionadas, sino que son independientes por parejas. Demostremos que éstas son independientes también en conjunto. Consideremos primeramente la distribución conjunta de tres magnitudes aleatorias V_1, V_2, V_3. En virtud de las fórmulas (3.11.11), la esperanza matemática condicional de la mangnitud V_3 es función lineal de los valores v_1, v_2 de las magnitudes V_1, V_2 y su dispersión condicional Δ_3 no depende de v_1, v_2. Por eso, la densidad condicional de probabilidad de la magnitud V_3 se expresa por la fórmula

$$f_3(v_3 \mid v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_3}} e^{-\frac{1}{2\Delta_3}(v_3 - \alpha v_1 - \beta v_2)^2} \qquad (3.11.16)$$

y la densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes V_1, V_2, V_3 es igual a

$$f_{123}(v_1, v_2, v_3) = f_{12}(v_1, v_2)\, f_3(v_3 \mid v_1, v_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 D_1 D_2 \Delta_3}} \exp\left\{ -\frac{v_1^2}{2D_1} - \frac{v_2^2}{2D_2} - \frac{(v_3 - \alpha v_1 - \beta v_2)^2}{2\Delta_3} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 D_1 D_2 \Delta_3}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_1} + \frac{\alpha^2}{\Delta_3} \right) v_1^2 + \left(\frac{1}{D_2} + \frac{\beta^2}{\Delta_3} \right) v_2^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\Delta_3} v_3^2 + 2\frac{\alpha\beta}{\Delta_3} v_1 v_2 - 2\frac{\alpha}{\Delta_3} v_1 v_3 - 2\frac{\beta}{\Delta_3} v_2 v_3 \right] \right\}.$$

De aquí, aplicando la fórmula (3.11.8), hallamos la densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes V_1, V_3. Teniendo en consideración que en este caso $n = 3$.

$$c_{11} = \frac{1}{D_1} + \frac{\alpha^2}{\Delta_3}, \quad c_{22} = \frac{1}{D_2} + \frac{\beta^2}{\Delta_3}, \quad c_{33} = \frac{1}{\Delta_3},$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\alpha\beta}{\Delta_3}, \quad c_{13} = c_{31} = -\frac{\alpha}{\Delta_3}, \quad c_{23} = c_{32} = -\frac{\beta}{\Delta_3},$$

hallamos

$$f_{13}(v_1, v_3) = \sqrt{\frac{|C|}{2\pi c_{22}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(c'_{11} v_1^2 + c'_{33} v_3^2 \right) + 2c'_{13} v_1 v_3 \right\},$$

donde

$$c'_{11} = \frac{1}{D_1} + \frac{\alpha^2}{\Delta_3} - \frac{\alpha^2\beta^2 D_2}{\Delta_3(\Delta_3 + \beta^2 D_2)},$$

$$c'_{33} = \frac{1}{\Delta_3} - \frac{\alpha^2 D_2}{\Delta_3(\Delta_3 + \beta^2 D_2)}, \quad c'_{13} = -\frac{\alpha}{\Delta_3 + \beta^2 D_2}.$$

Pero según lo demostrado las magnitudes aleatorias V_1 y V_3 son independientes. Por consiguiente, $c'_{13} = 0$. Pero esto puede ser solamente

cuando $\alpha = 0$. De modo análogo podemos demostrar que de la independencia de las magnitudes V_2 y V_3 se desprende que $\beta = 0$. Ahora bien, la distribución condicional de la magnitud V_3, determinada por la fórmula (3.11.16), no depende de los valores v_1, v_2 de las magnitudes V_1, V_2 y, por lo tanto, coincide con la distribución no condicional de la magnitud V_3 y, por consiguiente, $\Delta_3 = D_3$. De aquí se deduce que las magnitudes V_1, V_2, V_3 son independientes en conjunto. Luego, por inducción, aplicando el mismo procedimiento, se demuestra que las magnitudes V_1, . . ., V_k son independientes en conjunto para cualquiera que sea k.

Así pues, para cualquiera n, las magnitudes aleatorias V_1, ..., V_n, que tienen una distribución conjunta normal, son no correlacionadas si, y sólo si, éstas son independientes en conjunto.

De la independencia de las magnitudes aleatorias V_1, . . ., V_n determinables por la transformación de (3.11.12) se deriva que al sustituir en la fórmula (3.11.1) las expresiones de las variables x_1, . . ., x_n, determinadas por las fórmulas (3.11.12) sustituyendo las magnitudes aleatorias V_1, . . ., V_n por las variables v_1, ..., v_n, todos los coeficientes adjuntos a los productos de las variables v_1, . . ., v_n deben convertirse en cero, y los coeficientes adjuntos a $v_1^2/2$, . . ., $v_n^2/2$ deben ser iguales a las magnitudes inversas de las dispersiones $1/D_1$, . . ., $1/D_n$ correspondientes a las magnitudes V_1, . . ., V_n. Esta condición nos permitirá establecer las relaciones buscadas entre las dispersiones y los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias X_1, . . ., X_n y los coeficientes c_{pq} en la expresión (3.11.1) de la densidad normal de probabilidad.

Al sustituir en las fórmulas (3.11.12) las magnitudes aleatorias por las variables correspondientes, y las expresiones obtenidas x_1, . . ., x_n en el exponente de la (3.11.1), vemos que los productos v_1v_n se obtienen solamente como resultado de la multiplicación de $(x_n - m_n)$ por $(x_1 - m_1)$ $(x_2 - m_2)$, . . ., $(x_{n-1} - m_{n-1})$ y como resultado de elevar al cuadrado $(x_n - m_n)$. Por consiguiente, el coeficiente adjunto a v_1v_n en la expresión obtenida es igual a

$$c_{n1} + c_{n2}\gamma_{21} + c_{n3}\gamma_{31} + \ldots + c_{nn}\gamma_{n1}.$$

Igualando esta expresión a cero y sustituyendo los coeficientes γ_{21}, γ_{31}, . . ., γ_{n1} por sus expresiones de (3.11.13), obtendremos la relación siguiente:

$$c_{n1}k_{11} + c_{n2}k_{21} + \ldots + c_{nn}k_{n1} = 0. \qquad (3.11.17)$$

Observemos ahora que la expresión (3.11.1) de la densidad normal es completamente simétrica con respecto a x_1, . . ., x_n y la numeración de las magnitudes aleatorias X_1, . . ., X_n se puede establecer arbitrariamente, por ejemplo, se puede tomar la magnitud X_μ por la primera y la magnitud X_ν por la n-ésima. Por consiguiente, la relación (3.11.17) es válida no solamente para la n-ésima línea

de la matriz (3.11.2) de los coeficientes c_{pq} y para la primera columna de la matriz de correlación K del vector aleatorio sino que, en general, para cualquier línea de la matriz C y para cualquier columna de la matriz de correlación K con números no coincidentes. Así pues, de (3.11.17), en virtud de la simetría, se deducen las relaciones

$$c_{\mu 1}k_{1\nu} + c_{\mu 2}k_{2\nu} + \ldots + c_{\mu n}k_{n\nu} = 0, \qquad (3.11.18)$$

válidas para cualesquiera μ, ν, $\mu \neq \nu$.

El cuadrado de la variable v_1 se obtiene evidentemente en cada sumando del exponente en (3.11.1), además, el coeficiente adjunto a v_1^2 en el sumando $c_{11}(x_1 - m_1)^2$ es igual a c_{11}, los coeficientes anexos a v_1^2 en los sumandos tipo $c_{p1}(x_p - m_p)(x_1 - m_1)$, $p \neq 1$ son iguales a las magnitudes correspondientes $c_{p1}\gamma_{p1}$ y los coeficientes adjuntos a v_1^2 en los sumandos $c_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_q)$; p, $q \neq 1$, son iguales a las magnitudes correspondientes $c_{pq}\gamma_{p1}\gamma_{q1}$. Por consiguiente, en virtud de (3.11.13), el coeficiente sumario anexo a v_1^2 es igual a

$$\frac{1}{k_{11}^2}\sum_{p,\,q=1}^{n} c_{pq}k_{p1}k_{q1}.$$

Por otra parte, este coeficiente debe ser igual a la magnitud inversa de la dispersión $1/D_1 = 1/k_{11}$ de la magnitud aleatoria V_1. Por lo tanto, es válida la relación

$$\frac{1}{k_{11}^2}\sum_{p,\,q=1}^{n} c_{pq}k_{p1}k_{q1} = \frac{1}{k_{11}},$$

o sea

$$\sum_{p,\,q=1}^{n} c_{pq}k_{p1}k_{q1} = k_{11}. \qquad (3.11.19)$$

Transformemos el primer miembro de esta igualdad. Efectuando primeramente la adición con respecto al índice q y sacando fuera del signo de suma con respecto a q el factor común k_{p1}, podemos escribir

$$\sum_{p,\,q=1}^{n} c_{pq}k_{p1}k_{q1} = \sum_{p=1}^{n}\Big(\sum_{q=1}^{n} c_{pq}k_{q1}\Big)k_{p1}. \qquad (3.11.20)$$

Pero, ed virtud de (3.11.18),

$$\sum_{q=1}^{n} c_{pq}k_{q1} = c_{p1}k_{11} + c_{p2}k_{21} + \ldots + c_{pn}k_{n1} = 0,$$

para cualquiera $p \neq 1$. Por consiguiente, en la suma con respecto al índice p en (3.11.20) todos los sumandos son iguales a cero, salvo el sumando correspondiente a $p = 1$, y obtendremos

$$\sum_{p,\,q=1}^{n} c_{pq}k_{p1}k_{q1} = \Big(\sum_{q=1}^{n} c_{1q}k_{q1}\Big)k_{11}.$$

Sustituyendo esta expresión en (3.11.19), obtenemos la relación

$$\sum_{q=1}^{n} c_{1q}k_{q1} = c_{11}k_{11} + c_{12}k_{21} + \ldots + c_{1n}k_{n1} = 1. \qquad (3.11.21)$$

De aquí, debido a la simetría de la expresión (3.11.1) de la densidad normal de probabilidad con respecto a las variables $x_1, \ldots, x_n$, obtendremos la relación

$$c_{\nu 1}k_{1\nu} + c_{\nu 2}k_{2\nu} + \ldots + c_{\nu n}k_{n\nu} = 1 \ (\nu = 1, \ldots, n). \qquad (3.11.22)$$

Así pues, hemos deducido las relaciones (3.11.18) y (3.11.22) que ligan los elementos de la matriz de los coeficientes C, de forma cuadrática en el exponente de la expresión de la densidad normal de probabilidad con los elementos de la matriz de correlación K del vector aleatorio.

Para determinar las dispersiones y los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$, tomemos todas las ecuaciones (3.11.18) y la ecuación (3.11.22) correspondiente al mismo valor q del índice ν:

$$\begin{aligned}
&c_{11}k_{1q} + c_{12}k_{2q} + \ldots + c_{1n}k_{nq} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{q1}k_{1q} + c_{q2}k_{2q} + \ldots + c_{qn}k_{nq} = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{n1}k_{1q} + c_{n2}k_{2q} + \ldots + c_{nn}k_{nq} = 0.
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con respecto a $k_{1q}, k_{2q}, \ldots, k_{nq}$. Una vez resuelto este sistema, obtendremos

$$k_{pq} = \frac{\begin{vmatrix}
c_{11}c_{12}\ldots c_{1,p-1}0c_{1,p+1}\ldots c_{1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{q1}c_{q2}\ldots c_{q,q-1}1c_{q,p+1}\ldots c_{qn}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{n1}c_{n2}\ldots c_{n,p-1}0c_{n,p+1}\ldots c_{nn}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
c_{11}c_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c_{1n}\\
c_{21}c_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c_{2n}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{n1}c_{n2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c_{nn}
\end{vmatrix}}$$

Por fin, después de descomponer el determinante del numerador por los elementos de la p — ésima columna, obtendremos

$$k_{pq} = \frac{C_{pq}}{|C|} \ (p, q = 1, \ldots, n). \qquad (3.11.23)$$

donde, por $C_{pq} = C_{qp}$ se designa el complemento algebraico del elemento $c_{pq} = c_{qp}$ en el determinante $|C|$:

$$C_{pq} = (-1)^{p+q} \begin{vmatrix} c_{11} \dots c_{1,p-1} c_{1,p+1} \dots c_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{q-1,1} \dots c_{q-1,p-1} c_{q-1,p+1} \dots c_{q-1,n} \\ c_{q+1,1} \dots c_{q+1,p-1} c_{q+1,p+1} \dots c_{q+1,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1} \dots c_{n,p-1} \; c_{n,p+1} \dots c_{nn} \end{vmatrix} \quad (p, q = 1, \dots, n). \tag{3.11.24}$$

La fórmula (3.11.23) expresa las dispersiones y los momentos de correlación de las componentes de un vector aleatorio normalmente repartido por medio de los coeficientes, de forma cuadrática en el exponente de la expresión de la densidad de probabilidad del mismo.

Las relaciones (3.11.18) y (3.11.22) permiten resolver también el problema inverso, es decir, expresar los coeficientes c_{pq} en la expresión de la densidad normal de probabilidad por medio de las dispersiones y los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias. Para resolver este problema, tomemos la ecuación (3.11.18) correspondiente a un mismo valor p del índice μ y la ecuación (3.11.22) correspondiente a $\nu = p$ y escribámoslas en la forma

$$\begin{aligned} k_{11}c_{p1} + k_{21}c_{p2} + \dots + k_{n1}c_{pn} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{1p}c_{p1} + k_{2p}c_{p2} + \dots + k_{np}c_{pn} &= 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{1n}c_{p1} + k_{2n}c_{p2} + \dots + k_{nn}c_{pn} &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con respecto a $c_{p1}, c_{p2}, \dots, c_{pn}$. Al resolver este sistema de ecuaciones, obtendremos, al igual que antes:

$$c_{pq} = \frac{K_{pq}}{|K|} \quad (p, q = 1, \dots, n), \tag{3.11.25}$$

donde $|K|$ es el determinante de la matriz de correlación K:

$$|K| \begin{vmatrix} k_{11}k_{12} \dots k_{1n} \\ k_{21}k_{22} \dots k_{2n} \\ k_{n1}k_{n2} \dots k_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3.11.26}$$

y K_{pq} es el complemento algebraico del elemento k_{pq} en el determinante $|K|$ *).

Para lo sucesivo necesitaremos todavía la fórmula

$$|C||K| = 1, \tag{3.11.27}$$

que liga los determinantes de las matrices C y K. Para la deducción de esta fórmula observemos que, según la regla de multiplicación de los determinantes, los elementos del determinante $|A| = |C||K|$ se definen por la fórmula:

$$a_{\mu\nu} = c_{\mu 1}k_{1\nu} + c_{\mu 2}k_{2\nu} + \ldots + c_{\mu n}k_{n\nu} \quad (\mu, \nu = 1, \ldots, n).$$

En virtud de (3.11.18) y (3.11.22), las expresiones obtenidas son iguales a cero para $\mu \neq \nu$ y a la unidad para $\mu = \nu$. Por consiguiente,

$$|A| = |C||K| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

lo cual demuestra la fórmula (3.11.27).

Sustituyendo las expresiones de los coeficientes c_{pq} de (3.11.25) y la expresión del determinante $|C|$ de (3.11.27) en (3.11.1), obtendremos la siguiente fórmula para la densidad de probabilidad de un vector aleatorio n-dimensional normalmente repartido:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |K|}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2|K|} \sum_{p,\, q=1}^{n} K_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_q)\right\}. \tag{3.11.28}$$

Esta fórmula muestra que la distribución normal se determina por completo por la esperanza matemática y la matriz de correlación del vector aleatorio. Le dejamos al lector que por sí mismo obtenga de (3.11.28) la fórmula (3.6.20) deducida más arriba para la densidad conjunta de probabilidad de dos magnitudes aleatorias.

Pasemos ahora a la determinación de la función característica de un vector aleatorio normalmente repartido. Sustituyendo en la fórmula general (3.5.2) la expresión (3.11.1) de la densidad normal

*) Si el lector conoce los elementos del Algebra matricial, verá con facilidad directamente de (3.11.18) y (3.11.22) que las matrices C y K son recíprocamente inversas, debido a lo cual se obtienen a la vez las fórmulas (3.11.23), (3.11.25) y (3.11.27).

de probabilidad, obtendremos

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sqrt{\frac{|C|}{(2\pi)^n}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i \sum_{r=1}^{n} \lambda_r x_r - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{p,\, q=1}^{n} c_{pq} (x_p - m_p)(x_q - m_q) \right\} dx_1, \ \ldots, \ dx_n. \qquad (3.11.29)$$

Una vez sustituidas las variables conforme a las fórmulas (3.11.12), los coeficientes anexos a los productos de las variables $v_1, \ldots, v_n$ en el exponente serán iguales, según lo demostrado, a cero y la expresión para la función característica tomará la fórma

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sqrt{\frac{|C|}{(2\pi)^n}} \exp\left\{ i \sum_{r=1}^{n} m_r \lambda_r \right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i \left[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 (\gamma_{21} v_1 + v_2) + \ldots + \lambda_n (\gamma_{n1} v_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \gamma_{n2} v_2 + \ldots + v_n) \right] - \sum_{r=1}^{n} \frac{v_r^2}{2D_r} \right\} dv_1 \ldots dv_n.$$

Aquí la función subintegral se descompone en el producto de los multiplicadores cada uno de los cuales depende solamente de una de las variables $v_1, \ldots, v_n$. Por eso la integral en la expresión obtenida es igual al producto de n integrales simples y

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sqrt{\frac{|C|}{(2\pi)^n}} \exp\left\{ i \sum_{r=1}^{n} m_r \lambda_r \right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i (\lambda_1 + \gamma_{21} \lambda_2 + \ldots + \gamma_{n1} \lambda_n) v_1 - \frac{v_1^2}{2D_1} \right\} \times$$

$$\times dv_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i \lambda_n v_n - \frac{v_n^2}{2D_n} \right\} dv_n.$$

Aplicando para el cálculo de los integrales obtenidos la fórmula (3.11.7), obtendremos

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sqrt{|C| D_1 \ldots D_n} \exp\left\{ i \sum_{r=1}^{n} m_r \lambda_r - \frac{D_1}{2} \times \right.$$

$$\left. \times (\lambda_1 + \gamma_{21} \lambda_2 + \ldots + \gamma_{n1} \lambda_n)^2 - \ldots - \frac{D_n}{2} \lambda_n^2 \right\}. \qquad (3.11.30)$$

De la fórmula (3.11.14) se deduce que

$$D_1D_2 = k_{11}\frac{k_{11}k_{22}-k_{21}^2}{k_{11}} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}.$$

De las fórmulas semejantes para $D_3, \ldots, D_n$ se deduce fácilmente que el producto $D_1, \ldots, D_n$ es igual al determinante de la matriz de correlación K. Por eso, en virtud de (3.11.27), $|C| D_1 \ldots D_n = 1$. Luego, abriendo el paréntesis en el exponente de (3.11.30), obtendremos los cuadrados de las variables $\dot{\lambda}_1, \ldots, \dot{\lambda}_n$ y todos sus productos posibles. Por lo tanto,

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \exp\left\{ i \sum_{r=1}^{n} m_r\lambda_r - \frac{1}{2} \sum_{p,\, q=1}^{n} \alpha_{pq}\lambda_p\lambda_q \right. \quad (3.11.31)$$

Para calcular los coeficientes α_{pq}, observemos que el coeficiente anexo a λ_1^2 en (3.11.30) es igual a $D_1/2 = k_{11}/2$. Por consiguiente, $\alpha_{11} = k_{11}$. Puesto que la expresión (3.11.29) de la función característica es simétrica tanto con respecto a las variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ como con respecto a las variables de integración $x_1, \ldots, x_n$, entonces, en general, $\alpha_{pp} = k_{pp}$. A continuación, el coeficiente adjunto al producto $\lambda_1\lambda_2$ en (3.11.30) es igual, en virtud de (3.11.13), a $D_1\gamma_{21}/2 = k_{21}/2 = k_{12}/2$. Por consiguiente, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = k_{12} = k_{21}$, de donde, en virtud de la simetría, llegamos a la conclusión de que, en general, $\alpha_{pq} = k_{pq}$. Sustituyendo esta expresión en (3.11.14), obtendremos definitivamente

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \exp\left\{ i \sum_{r=1}^{n} m_r\lambda_r - \frac{1}{2} \sum_{p,\, q=1}^{n} k_{pq}\lambda_p\lambda_q \right\}. \quad (3.11.32)$$

En el caso particular, cuando $n = 1$, esta fórmula da la expresión (2.5.14) de la función característica de la magnitud aleatoria escalar normalmente repartida.

En conclusión del párrafo deduciremos la fórmula para el momento central mixto de cuarto orden de las componentes de un vector aleatorio normalmente repartido. Conforme a la fórmula (3.5.6), para determinar cualquier momento central es necesario hallar la correspondiente función característica derivada del momento aleatorio centrado. La fórmula (3.11.32) da, para la función característica del vector cuadridimensional centrado normalmente repartido, la expresión siguiente:

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{p,\, q=1}^{4} k_{pq}\lambda_p\lambda_q \right\}. \quad (3.11.33)$$

Derivando esta expresión con respecto a las variables $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ una sola vez y haciendo luego $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, obtendremos en virtud de (3.5.6)

$$\mu_{1111} = M[\mathring{X}_1^0\mathring{X}_2^0\mathring{X}_3^0\mathring{X}_4^0] = k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23}. \quad (3.11.34)$$

CAPITULO 4

Características de funciones aleatorias

§ 4.1. Leyes de distribución de una magnitud aleatoria

En el capítulo 1 vimos que en los problemas prácticos se encuentran magnitudes aleatorias que varían sus valores en el proceso del experimento. De ejemplo de tal magnitud aleatoria puede servir el resultado de la medición o del registro de cualquier magnitud que es función del tiempo o de otra variable cualquiera. La magnitud aleatoria que cambia su valor en el proceso de una prueba representa una función aleatoria. En los problemas prácticos se encuentran con mayor frecuencia funciones aleatorias del tiempo. Sin embargo, uno tiene que operar también con funciones aleatorias de otros argumentos. Así, por ejemplo, la superficie del mar agitado representa, en cada instante dado, una superficie aleatoria cuya Z-coordenada es función aleatoria de la abscisa y la ordenada. El estado de esta superficie, en un momento de tiempo determinado, puede ser obtenido como resultado del levantamiento aerofotogramétrico. El vector velocidad del viento en una atmósfera turbulenta es función aleatoria de cuatro argumentos: de las coordenadas de un punto del espacio y del tiempo.

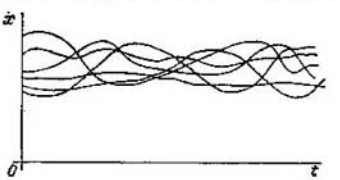


Fig. 4.1.1.

Teniendo en consideración los ejemplos citados, demos la definición general siguiente: se llama *función aleatoria* a tal función cuyo valor es, para cada valor dado del argumento (o de los argumentos) una magnitud aleatoria. Cada función concreta que puede ser registrada durante una sola observación de la función aleatoria se llama *realización* de la misma. Por ejemplo, el oscilograma que registra una función aleatoria del tiempo representa la realización de la función aleatoria. La superficie del mar agitado fotografiada en el instante dado también es un ejemplo de realización de la función aleatoria de dos variables. Si repetimos las pruebas, obtendremos diferentes realizaciones de la función aleatoria (fig. 4.1.1). De acuerdo con lo expuesto se puede dar también otra definición de la función aleatoria: la función aleatoria representa cierto conjunto de funciones concretas con una distribución de probabilidades pre-

fijado en el mismo. No obstante, para los fines aplicativos es más conveniente usar la primera definición.

Convengamos en designar las funciones aleatorias por las mayúsculas del alfabeto latino tomando generalmente las últimas letras del mismo. Las minúsculas correspondientes las emplearemos para designar las realizaciones de las funciones aleatorias. Designaremos por t el argumento de la función aleatoria, haciendo caso omiso de que sea éste una magnitud escalar o un vector de cualquier número de mediciones (es decir, un conjunto de varias variables).

Claro está que en los gráficos se pueden representar por curvas y superficies solamente las realizaciones de las funciones aleatorias y no las propias funciones.

Las funciones aleatorias pueden ser escalares y vectoriales. Como ejemplo de una función aleatoria escalar puede servir la señal captada por el radiorreceptor. De ejemplo de una función aleatoria vectorial puede servir el vector velocidad del viento en la atmósfera turbulenta.

El número de la componente de una función aleatoria vectorial se puede considerar como argumento adicional que puede tomar solamente valores enteros determinados. Por eso, la componente $X_\nu(t)$ de una función aleatoria vectorial se puede considerar como la función aleatoria escalar $X(t, \nu)$ de los argumentos t y ν. Por consiguiente, al estudiar las propiedades generales de las funciones aleatorias, propiedades inherentes a las funciones aleatorias de un número cualquiera de argumentos, puede limitarse a las funciones aleatorias escalares. Todos los resultados obtenidos serán aplicables al conjunto de componentes de cualquier función aleatoria vectorial, es decir, a la propia función aleatoria vectorial.

La función aleatoria del tiempo caracteriza el proceso de variación de la magnitud aleatoria en el transcurso del tiempo. Por eso, las funciones aleatorias del tiempo se llaman de ordinario *procesos aleatorios* (a veces estocásticos). La función aleatoria de las coordenadas de un punto del espacio se denomina corrientemente *campo aleatorio*.

Los argumentos de las funciones aleatorias pueden variar ininterrumpidamente en cierta zona o de un modo discreto. Los valores de la función aleatoria de un argumento discreto forman una secuencia de magnitudes aleatorias llamada *secuencia aleatoria*.

En la mayoría de los problemas concernientes a la automatización o la radiotécnica uno tiene que operar solamente con funciones aleatorias del tiempo. Por eso, teniendo en cuenta el objetivo principal de este libro, servir de introducción a la Teoría de las Probabilidades para los que deseen estudiar sus aplicacinoes en el campo de la automatización o la radiotécnica, así como en el de las asignaturas relacionadas con estas últimas, en lo sucesivo vamos a exponer el material referente a las funciones aleatorias escalares de una

variable independiente escalar que cambia continua o discretamente en cierto intervalo $\alpha < t < \beta$ (en particular, puede ser $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$). Sin embargo, conviene recordar que todos los métodos generales de la Teoría de funciones aleatorias son aplicables a cualesquiera funciones aleatorias de argumentos escalares o vectoriales.*)

La función aleatoria se puede considerar como el conjunto de magnitudes aleatorias X_t que representan los valores de la misma para diferentes valores de t:

$$X_t = X(t) \qquad (\alpha < t < \beta).$$

Esto quiere decir que la función aleatoria es equivalente a un conjunto infinito de magnitudes aleatorias. Por eso el material científico de la Teoría de funciones aleatorias es considerablemente más complejo que el de la Teoría de magnitudes aleatorias.

Conforme a la definición, el valor de una función aleatoria escalar, para cualquier valor fijado del argumento t, es una magnitud aleatoria corriente. En el capítulo 2 vimos que cualquier magnitud aleatoria se caracteriza por completo por su ley de distribución. Por lo tanto, la característica completa del valor de la función aleatoria $X(t)$, para cualquier valor fijado t, es la densidad de probabilidad de este valor, que designaremos por $f_1(x; t)$. Esta densidad de probabilidad, llamada *densidad unidimensional de probabilidad* de la función aleatoria $X(t)$, en el caso general, depende de la elección del valor de t, es decir, es función de t lo que se refleja también en su designación $f_1(x; t)$. Aquí el primer argumento x designa el valor posible de la función aleatoria $X(t)$ para un valor de t fijo. El segundo argumento t sirve de parámetro, del cual depende la densidad de probabilidad $f_1(x; t)$.

La densidad unidimensional de probabilidad $f_1(x; t)$ no es suficiente, en el caso general, para una característica completa de la función aleatoria. Dicha densidad puede caracterizar solamente cualquier ordenada, tomada por aislado, de una curva aleatoria. En la práctica llevamos a cabo diferentes operaciones con las funciones aleatorias, en particular, realizamos la derivación de las mismas. En este caso, es necesario examinar los valores de la magnitud aleatoria cuando el argumento tiene diferentes valores próximos. De este modo, durante la derivación es necesario examinar las ordenadas de una curva aleatoria no por aislado, sino conjuntamente. De acuerdo con lo expuesto fijamos dos valores del argumento $t: t_1$ y t_2. Los valores $X(t_1)$ y $X(t_2)$ de la función aleatoria, correspondientes a los valores mencionados del argumento, pueden caracte-

*) V. S. Pugachov. Teoría de funciones aleatorias y su aplicación a los problemas del mando automático. Fizmatguiz, 1962, cap. 8 y 10. (Versión inglesa: V. S. Pugachev. Theory of Random Functions and its Application to Control Problems. Pergamon Press, 1965, chapters 8 and 10).

rizarse por la densidad conjunta de probabilidad $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ que se llama densidad bidimensional de probabilidad de la función aleatoria $X(t)$.

Según lo expuesto en el § 3.1, la densidad bidimensional de probabilidad $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ también determina por completo la densidad unidimensional de probabilidad $f_1(x_1; t_1)$. En efecto, en virtud de la fórmula (3.1.18)

$$f_1(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_2. \qquad (4.1.1)$$

La densidad bidimensional de probabilidad de una función aleatoria representa una característica más completa de la misma que la unidimensional puesto que por la densidad bidimensional siempre se puede determinar la unidimensional. No obstante, tampoco la densidad bidimensional de probabilidad es, en el caso general, una característica completa de la función aleatoria. Pero ¿es, tal vez, el conocimiento de la densidad bidimensional de probabilidad suficiente para poder resolver todos los problemas prácticos? Es fácil ver que no es así. Por ejemplo, para la integración de una magnitud aleatoria, es necesario tomar sus valores para un número bastante grande de valores del argumento, componer la suma correspondiente y luego pasar al límite, dirigiendo este número a la infinidad y el intervalo máximo entre los valores vecinos del argumento, a cero. Así pues, aunque esto sea una integración arproximada, tenemos que examinar en conjunto un número bastante grande de ordenadas de una curva aleatoria, si queremos hallar la ley de distribución de la integral de la función aleatoria. Continuando los razonamientos anteriores, se puede determinar una densidad tri-, cuatridimensional (y, en general, de n dimensiones) de probabilidad de la magnitud aleatoria para cualquier n entero positivo. Es evidente que la densidad de probabilidad de cualquier orden inferior puede ser calculada por la del orden superior. Por eso, cada densidad de probabilidad posterior es una característica más completa de la función aleatoria que todas las densidades anteriores. Como resultado se obtiene una secuencia infinita de densidades de probabilidad de órdenes siempre crecientes. Surge la pregunta ¿es esta secuencia infinita de densidades de probabilidad una característica completa de la función aleatoria? Las investigaciones matemáticas dan a esta pregunta una respuesta positiva que, sin embargo, no es válida para todas las funciones aleatorias. Resulta que la secuencia infinita de densidades de probabilidad caracteriza por completo la función aleatoria solamente en el caso en que todas sus realizaciones posibles son suficientemente «lisas», es decir, si toda realización puede ser determinada, cualquiera que sea el grado de exactitud, por sus valores en una serie discreta de puntos que se encuentran uno de

otro a una distancia suficientemente próxima (a excepción, tal vez, de cierto conjunto de realizaciones cuya probabilidad sumaria de producción es igual a cero; prácticamente todas estas realizaciones pueden ser despreciadas).

En algunos casos la secuencia infinita de densidades de probabilidad de la función aleatoria puede ser determinada de un modo comparativamente simple. La cosa es así en lo que se refiere al caso más ampliamente difuso de la ley normal de distribución.

La función aleatoria se considera *normalmente distribuida* siempre que todas sus densidades de probabilidad de cualesquiera órdenes sean normales. En el párrafo siguiente veremos que para una función aleatoria normalmente distribuida toda la secuencia infinita de densidades de probabilidad se determina por completo si se conoce la densidad bidimensional de probabilidad.

Vemos que la característica probabilística completa de una magnitud aleatoria, sirviéndose de sus leyes de distribución de diferentes órdenes, resulta ser muy compleja. Por eso surge la pregunta: ¿no se podría en algunos problemas prácticos limitarse a características más simples, aunque estén lejos de ser completas, de la función aleatoria, análogas a las características numéricas, de las magnitudes aleatorias.

Como vimos en los §§ 3.8 y 3.9, las esperanzas matemáticas, las dispersiones y los momentos de correlación, es decir, los momentos de los dos primeros órdenes de las funciones lineales de magnitudes aleatorias se pueden calcular, sin conocer las leyes de distribución de estas magnitudes aleatorias, sabiendo sólo sus momentos de los órdenes primero y segundo. Se pueden obtener fórmulas semejantes también para momentos de órdenes más altos. Hemos visto que para una clase más difusa de magnitudes aleatorias, a saber: para las magnitudes aleatorias normalmente repartidas, los momentos de los dos primeros órdenes resultan ser una característica completa.

Por eso, también al resolver problemas prácticos de la Teoría de funciones aleatorias, es conveniente limitarse al estudio de los dos primeros momentos sin examinar las leyes de distribución. En este caso resulta suficiente conocer los momentos de los dos primeros órdenes de las funciones aleatorias para el estudio de cualesquiera operaciones lineales sobre dichas funciones.

§ 4.2. Esperanza matemática y función correlativa de una función aleatoria

Fijemos cualquier valor del argumento t y examinemos el valor de la función aleatoria (para este valor del argumento) como una magnitud aleatoria corriente. Para esta magnitud aleatoria podemos determinar la esperanza matemática que, hablando en general, dependerá del valor elegido de t. Dando a t todos los valores posibles,

obtendremos cierta función $m_x(t)$ a la cual es natural llamarle esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$. Así pues, se denomina *esperanza matemática* de la función aleatoria $X(t)$ a tal función $m_x(t)$ cuyo valor, para cada valor dado del argumento t, es igual a la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $X(t)$ para este valor (fijado) de t*):

$$m_x(t) = M[X(t)]. \tag{4.2.1}$$

En virtud de la fórmula (2.3.2), la esperanza matemática de la función aleatoria se puede expresar por su densidad unidimensional de probabilidad:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x; t)\, dx. \tag{4.2.2}$$

Según la definición, la esperanza matemática representa el valor medio (pesado en cuanto a la probabilidad) de la magnitud aleatoria. Por lo tanto, para cada valor dado de t, la ordenada de la curva $m_x(t)$ representa el valor medio de la de la curva aleatoria $X(t)$ para este valor de t. Así pues, la esperanza matemática de la función aleatoria no es más que una curva media alrededor de la cual se disponen las realizaciones posibles de la función aleatoria (fig. 4.2.1).

Es evidente que al considerar solamente la esperanza matemática de la función aleatoria, despreciamos todas las desviaciones aleatorias posibles, reduciendo a la media todo el haz de realizaciones posibles de la función aleatoria. Así se procede al emplear los métodos de investigación corrientes no relacionados con la Teoría de las Probabilidades. No obstante, el sentido de la Teoría de las probalilidades consiste precisamente en examinar no solamente los valores medios regulares de las magnitudes, sino también las desviaciones aleatorias con respecto a éstos. Conforme a lo dicho, para caracterizar la fluctuación de las realizaciones de una función aleatoria en torno a su esperanza matemática, se puede aprovechar la dispersión de dicha función, la cual, en virtud de la definición (2.3.9), va expresada por la densidad unidimensional de probabilidad de la función aleatoria por la fórmula

$$D_x(t) = M[\{X(t) - m_x(t)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - m_x(t)\}^2 f_1(x; t)\, dx. \tag{4.2.3}$$

En los problemas prácticos a veces es conveniente en lugar de la dispersión examinar la desviación cuadrática media de la fun-

*) En este caso, se supone, claro está, que la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $X(t)$ existe para cualquier t, al igual que todas las esperanzas matemáticas de las cuales se tratará a continuación.

ción aleatoria:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \qquad (4.2.4)$$

La esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria son características numéricas de sus valores para cada valor dado del argumento t. Ellas, en cierto modo, determinan la banda que se llena por las realizaciones posibles de la función aleatoria (fig. 4.2.2 y 4.2.3). Sin embargo, la esperanza matemática y la dispersión

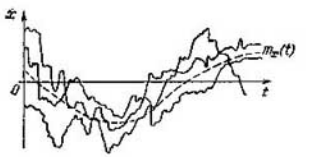


Fig. 4.2.1.

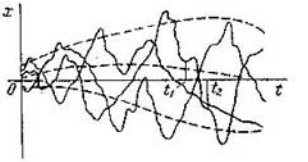


Fig. 4.2.2.

no determinan la conducta de las realizaciones posibles de la función aleatoria dentro de la banda indicada. En las fig. 4.2.2 y 4.2.3 se representan las realizaciones de dos funciones aleatorias con iguales esperanzas matemáticas y dispersiones. Sin embargo, éstas se comportan de un modo completamente diferente. Es obvio que al derivar, por ejemplo, estas dos funciones aleatorias obtendremos resultados absolutamente distintos. Por eso, además de la esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria, necesitamos conocer el grado de variabilidad de sus realizaciones, la rapidez del cambio de las mismas al variar el argumento t. A título de ejemplo tomemos dos valores t_1 y t_2 del argumento t en los dos gráficos (figs. 4.2.2 y 4.2.3) y separemos una realización de la función aleatoria en cada gráfico. En el primer caso, el conocimiento de la ordenada de la realización en el punto t_1 habla poco del valor de esta realización en el punto t_2, como resultado de una gran intensidad de variación de todas las realizaciones de la función aleatoria entre los puntos t_1 y t_2. En el segundo gráfico, el conocimiento del valor de la realización cuando $t = t_1$ permite indicar más exactamente el valor posible de la realización cuando $t = t_2$. Con otras palabras, en el segundo caso, el conocer el valor de realización en el punto t_1 prácticamente limita de un modo considerable la gama posible de valores de las realizaciones en el punto t_2. En el primer caso, los valores de las realizaciones posibles de la función aleatoria $X(t_1)$ y $X(t_2)$ en

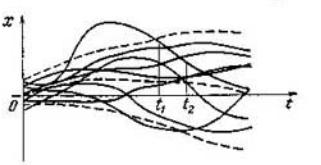


Fig. 4.2.3.

los puntos t_1 y t_2 dependen poco uno de otro, en el segundo caso, éstos están enlazados por una dependencia más fuerte.

Para ilustrar gráficamente esta tesis, llevaremos al eje x_1 los valores de la ordenada aleatoria $X(t_1)$ y al eje x_2, los valores de la ordenada aleatoria $X(t_2)$ (fig. 4.2.4 y 4.2.5). Tomemos una gran cantidad de realizaciones y marquemos los puntos $[X(t_1), X(t_2)]$, que corresponden a estas realizaciones en el plano x_1, x_2. Para las realizaciones de la función aleatoria, representadas en la fig. 4.2.2, las magnitudes aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ están vinculadas débilmente. Por eso la dispersión de los puntos $[X(t_1), X(t_2)]$ en el plano

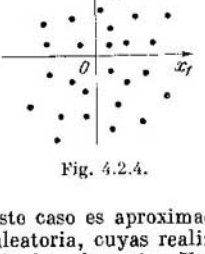


Fig. 4.2.4.

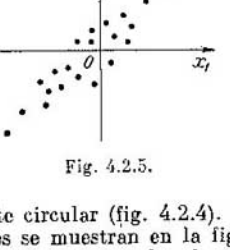


Fig. 4.2.5.

x_1x_2 en este caso es aproximadamente circular (fig. 4.2.4). Para la función aleatoria, cuyas realizaciones se muestran en la fig. 4.2.3, las magnitudes aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ están enlazadas por una dependencia fuerte. Por eso, para la función aleatoria cuyas realizaciones se representan en la fig. 4.2.3, los puntos posibles $[X(t_1), X(t_2)]$ se dispondrán en el plano x_1x_2 formando una elipse alargada (fig. 4.2.5).

Para caracterizar el grado de dependencia de los valores de una función aleatoria, correspondientes a dos valores diferentes del argumento, lo más simple es valerse del momento de correlación de estos valores de la función aleatoria. Llamemos *función aleatoria centrada* a la diferencia entre la función aleatoria y su esperanza matemática:

$$X^\circ(t) = X(t) - m_x(t). \tag{4.2.5}$$

Entonces el momento de correlación de los valores $X(t)$ y $X(t')$ de la función aleatoria $X(t)$, que corresponden a dos valores arbitrariamente elegidos del argumento t, t', se determinará por la fórmula

$$K_x(t, t') = M[X^\circ(t)\, X^\circ(t')]. \tag{4.2.6}$$

Dando a t y t' todos los valores posibles en la zona de variación del argumento de la función aleatoria $X(t)$, obtendremos la unción de dos variables t, t' que se denomina *función correlativa* (a veces *autocorrelativa*) de la función aleatoria $X(t)$. Así pues, se llama

función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ al momento de correlación de sus valores para dos valores del argumento t, t', considerado como función de t y t'.

Al coincidir los valores de los argumentos $t' = t$, el segundo miembro de la fórmula (4.2.6) representa la esperanza matemática del cuadrado de la función aleatoria centrada, es decir, la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$K_x(t, t) = D_x(t). \tag{4.2.7}$$

Así pues, la asignación de la función correlativa de una función aleatoria determina también su dispersión.

Para calcular la función correlativa de una función aleatoria se exige, en el caso general, el conocimiento de la densidad bidimensional de probabilidad. Entonces, en virtud de (3.4.7), la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ se determinará por la fórmula

$$K_x(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]\,[x' - m_x(t')]\, f_2(x, x'; t, t')\, dx\, dx'. \tag{4.2.8}$$

Teniendo en consideración que siendo $t' = t$, los valores $X(t')$ y $X(t)$ de la función aleatoria coinciden, y aplicando la fórmula (3.3.3), hallamos la siguiente expresión de la densidad bidimensional de probabilidad de la función aleatoria $X(t)$ cuando $t' = t$:

$$f_2(x, x'; t, t') = f_1(x; t)\, \delta(x' - x). \tag{4.2.9}$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (4.2.8) y cumpliendo la integración con respecto a x', sirviéndonos de la fórmula (2.2.6), reduzcamos la fórmula (4.2.8) a la forma (4.2.3).

Las fórmulas (4.2.2) y (4.2.8) pueden servir para el cálculo de la esperanza matemática y la función correlativa de la función aleatoria siempre que se conozca su densidad bidimensional (y por consiguiente, unidimensional) de probabilidad.

Sin embargo, en muchos problemas prácticos resulta posible determinar la esperanza matemática y la función correlativa de una función aleatoria empleando métodos más simples, sin recurrir a la determinación de las densidades de probabilidad. Luego veremos en ejemplos como esto se hace.

A veces, para caracterizar el enlace entre los valores de una magnitud aleatoria, en vez de la función correlativa, se usa *la función correlativa normada* que representa el coeficiente de correlación de los valores de la función aleatoria para dos valores del argumento. En virtud de la determinación del coeficiente de correlación (3.4.9) y de la fórmula (4.2.7), la función correlativa normada de una fun-

ción aleatoria $X(t)$ se determina por la fórmula

$$R_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)\, D_x(t')}} = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{K_x(t, t)\, K_x(t', t')}}. \quad (4.2.10)$$

Es evidente que la asignación de la dispersión y la función correlativa normada de una función aleatoria es equivalente a la asignación de la función de correlación de la misma.

En lo sucesivo necesitaremos examinar todavía el momento *inicial de segundo orden* de una función aleatoria, el cual se determina como el momento inicial mixto de segundo orden de sus valores para los valores arbitrariamente elegidos t, t' de su argumento:

$$\Gamma_x(t, t') = M[X(t)\, X(t')]. \quad (4.2.11)$$

El momento de segundo orden de una función aleatoria se puede expresar por su esperanza matemática y su función correlativa.

$$\Gamma_x(t, t') = m_x(t)\, m_x(t') + K_x(t, t'). \quad (4.2.12)$$

Esta fórmula es consecuencia directa de la fórmula (3.9.13) para la esperanza matemática del producto de dos magnitudes aleatorias y de las definiciones (4.2.6) y (4.2.11) de la función correlativa y el momento inicial de segundo orden.

Hemos dado las definiciones de la esperanza matemática, la función correlativa y el momento inicial de segundo orden para las funciones aleatorias reales. En los problemas prácticos uno tiene que operar sólo con funciones aleatorias reales. No obstante, en las investigaciones teóricas conviene frecuentemente introducir también funciones aleatorias complejas. Por eso, es necesario generalizar los conceptos introducidos extendiéndolos a las funciones aleatorias complejas.

De acuerdo con la definición del momento de correlación de las magnitudes aleatorias complejas, la función correlativa de una función aleatoria compleja $X(t)$ se determina por la fórmula

$$K_x(t, t') = M[X^0(t)\, \overline{X^0(t')}]. \quad (4.2.13)$$

Por una fórmula análoga se determina el momento inicial de segundo orden de una función aleatoria compleja.

Ejemplo 4.2.1. Examinemos la función aleatoria

$$X(t) = U \operatorname{sen} \omega_0 t + Z \cos \omega_0 t, \quad (4.2.14)$$

donde U y Z son magnitudes aleatorias no correlacionadas cuyas esperanzas matemáticas son iguales a cero y cuyas dispersiones son iguales a D_1 y D_2, respectivamente. Esta función aleatoria representa las oscilaciones armónicas de la frecuencia circular ω_0 con una amplitud aleatoria $\sqrt{U^2 + Z^2}$ y con una fase inicial aleatoria arctg (Z/U)*). Las realizaciones de esta función aleatoria

*) En este caso el arco tangente se toma en el primer cuadrante, si $Z > 0$, $U > 0$; en el segundo, si $Z > 0$, $U < 0$; en el tercero, si $Z < 0$, $U < 0$; en el cuarto, si $Z < 0$; $U > 0$.

son sinusoides con un período $T = 2\pi/\omega_0$ y con diferentes amplitudes y fases iniciales. En el ejemplo en cuestión la función aleatoria representa la combinación lineal de dos magnitudes aleatorias con los coeficientes sen $\omega_0 t$ y cos $\omega_0 t$. Por eso, aplicando la fórmula (3.8.9) nos convencemos de que la esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ es idénticamente igual a cero:

$$m_x(t) = m_u \operatorname{sen} \omega_0 t + m_z \cos \omega_0 t \equiv 0.$$

Poniendo en la fórmula (4.2.14) $t = t'$, obtendremos

$$X(t') = U \operatorname{sen} \omega_0 t' + Z \cos \omega_0 t'.$$

Esta fórmula, junto con (4.2.14), muestra que los valores $X(t)$ y $X(t')$ de la función aleatoria examinada, para dos valores arbitrariamente elegidos del argumento, son combinaciones lineales de dos magnitudes aleatorias no correlacionadas U y Z. Aplicando la fórmula (3.9.8) para el momento de correlación de dos combinaciones lineales de magnitudes aleatorias no correlacionadas, hallamos la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$:

$$K_x(t, t') = D_1 \operatorname{sen} \omega_0 t \operatorname{sen} \omega_0 t' + D_2 \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t'. \qquad (4.2.15)$$

En el caso particular, cuando $D_1 = D_2 = D$, la fórmula (4.2.15) toma la forma

$$K_x(t, t') = D \cos \omega_0 (t - t'). \qquad (4.2.16)$$

Ejemplo 4.2.2. Examinemos un caso más general, cuando

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu f_\nu(t), \qquad (4.2.17)$$

donde $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son cualesquiera funciones no aleatorias, en el caso general, complejas, y $X_1, \ldots, X_n$ son cualesquiera magnitudes aleatorias con esperanzas matemáticas arbitrarias, pero finitas, y momentos de segundo orden. La esperanza matemática se encuentra para esta función aleatoria muy sencillamente como la de una función lineal de las magnitudes aleatorias. Aplicando la fórmula (3.8.9), hallamos

$$m_x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} m_{x_\nu} f_\nu(t). \qquad (4.2.18)$$

Observando que los valores de la función aleatoria que se examina son, para dos valores del argumento arbitrariamente elegidos, funciones lineales de las mismas magnitudes aleatorias, podemos aplicar la fórmula (3.9.6) para calcular la función correlativa de esta función aleatoria. Entonces obtendremos

$$K_x(t, t') = \sum_{\nu, \mu=1}^{n} k_{\nu\mu} f_\nu(t) f_\mu(t'). \qquad (4.2.19)$$

donde $k_{\nu\mu}$ es el momento de correlación de las magnitudes aleatorias X_ν, X_μ ($\nu, \mu = 1, \ldots, n$; $k_{\nu\nu} = D_{x_\nu}$).

Ejemplo 4.2.3. Generalicemos ahora el problema del ejemplo 4.2.1 suponiendo aleatorias no solamente la amplitud y la fase, sino también la frecuencia de las oscilaciones armónicas. Así pues, examinemos la función aleatoria

$$X(t) = U \operatorname{sen} \Omega t + Z \cos \Omega t, \qquad (4.2.20)$$

donde U, Z, Ω son magnitudes aleatorias independientes; con la particularidad de que las magnitudes U y Z tienen esperanzas matemáticas iguales a cero y las mismas dispersiones D, y la magnitud aleatoria Ω se caracteriza por la densidad de probabilidad $f(\omega)$.

La esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ es idénticamente igual a cero. La fórmula (4.2.16) determina la función correlativa condicional

de la función aleatoria $X(t)$ para el valor dado ω de la frecuencia Ω:

$$K_x(t, t' \mid \omega) = M[X(t) X(t') \mid \Omega = \omega] = D \cos \omega (t - t').$$

Ahora, para hallar la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ basta multiplicar la función correlativa condicional hallada por el elemento correspondiente de probabilidad $f(\omega)\, d\omega$ e integrar con respecto a todos los valores posibles ω de la magnitud aleatoria Ω. Entonces, teniendo en cuenta que la frencuencia de oscilaciones es, en su esencia, una magnitud positiva, debido a lo cual su densidad de probabilidad $f(\omega)$ es igual a cero para $\omega < 0$, obtendremos

$$K_x(t,t') = D \int_0^\infty f(\omega) \cos \omega (t-t')\, d\omega. \tag{4.2.24}$$

Examinemos ahora el caso concreto cuando

$$f(\omega) = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)} \quad \text{siendo } \omega > 0. \tag{4.2.22}$$

En este caso la fórmula (4.2.21) da

$$K_x(t, t') = \frac{2D\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega (t-t')}{\alpha^2+\omega^2}\, d\omega.$$

Esta integral puede ser calculada por muchos procedimientos. Un método posible se expone en el suplemento I al final del libro. Aplicando la fórmula (23) deducida en el suplemento, obtendremos

$$K_x(t, t') = De^{-\alpha|t-t'|}. \tag{4.2.23}$$

Así pues, en el caso en que la densidad de probabilidad de la frecuencia aleatoria de oscilaciones armónicas se determina por la fórmula (4.2.22), la función correlativa de la sinusoide aleatoria representa una función exponencial. Esta función correlativa se encuentra en muchos problemas prácticos.

Ejemplo 4.2.4. Generalicemos el ejemplo 4.2.2 para el caso de la dependencia no lineal de la función con respecto a los parámetros aleatorios. Examinemos la función aleatoria

$$X(t) = \varphi(t, U_1, \ldots, U_n), \tag{4.2.24}$$

donde φ es la función completamente determinada de los parámetros indicados y $U_1, \ldots, U_n$ son los parámetros aleatorios para los cuales está asignada la densidad de probabilidad $f(u_1, \ldots, u_n)$.

En virtud de la definición de la esperanza matemática [(fórmula (3.4.2)], ésta y el momento de segundo orden de la función aleatoria $X(t)$ se determinan por las fórmulas

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, u_1, \ldots, u_n) f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1\, du_2 \ldots du_n, \tag{4.2.25}$$

$$\Gamma_x(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, u_1, \ldots, u_n)\, \varphi(t', u_1, \ldots, u_n) \times$$

$$\times f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n. \tag{4.2.26}$$

Conociendo la esperanza matemática y el momento inicial de segundo orden, se puede determinar la función correlativa de la magnitud aleatoria $X(t)$ por la fórmula (4.2.12).

Vemos que cuando la dependencia de la función aleatoria con respecto a los parámetros aleatorios es no lineal, para determinar su esperanza matemática y la función correlativa es necesario, en el caso general, conocer la densidad de probabilidad de los parámetros aleatorios, mientras que para determinar la esperanza matemática y la función correlativa de una función lineal de parámetros aleatorios basta conocer solamente las esperanzas matemáticas y las dispersiones de los parámetros aleatorios.

Ejemplo 4.2.5. Examinemos cierto elemento carente de inercia de un sistema automático, es decir, tal elemento cuya señal de salida, en cada instante dado, depende solamente del valor de la señal de entrada en el mismo momento de tiempo sin depender de cómo cambia esta última hasta el instante dado. Supongamos que la señal de entrada $X(t)$ es función aleatoria del tiempo, cuya esperanza matemática es igual a la señal útil que varía lentamente en la entrada del elemento en cuestión y la función aleatoria centrada representa la perturbación, es decir, las fluctuaciones aleatorias de la señal de entrada. Generalmente la señal de salida de tal elemento se envía a la entrada de cualquier dispositivo de inercia. Este dispositivo, como regla, no tiene tiempo para responder a las fluctuaciones rápidas de la señal de entrada y reacciona en lo principal sobre su valor medio que varía lentamente, es decir, sobre la esperanza matemática. Así, por ejemplo, si los timones del avión realizan rápidas oscilaciones aleatorias, éste no tendrá tiempo para responder a ellas y reaccionará sólo a las desviaciones medias de los timones alrededor de las cuales éstos se desvían a ambos lados. Por eso en las aplicaciones de la Teoría de las Probabilidades, en el campo de la automática, la esperanza matemática de la señal de salida $Y(t)$ se toma frecuentemente por la señal útil en la salida del elemento y las fluctuaciones de la señal de salida con respecto a su esperanza matemática, por el ruido en la salida del elemento. El problema consiste en hallar la señal útil, la dispersión y la función correlativa del ruido en la salida del elemento, conociendo las características probabilísticas necesarias de la señal de entrada.

Supongamos que la dependencia de la señal de salida del elemento con respecto a su señal de entrada se determina por la fórmula

$$Y(t) = \varphi(X(t)), \tag{4.2.27}$$

donde φ es, en el caso general, función unívoca no lineal, la característica del elemento. Es evidente que para determinar la esperanza matemática y la dispersión de la función aleatoria $Y(t)$ basta conocer, en el caso general, la densidad unidimensional de probabilidad de la función aleatoria $X(t)$. Entonces, la esperanza matemática y la dispersión de la función aleatoria $Y(t)$ se expresarán por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} m_y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f_1(x;\, t)\, dx, \\ D_y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y(t)]^2 f_1(x;\, t)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.28}$$

Para hallar la función correlativa de la función aleatoria $Y(t)$ basta conocer, en el caso general, la densidad bidimensional de la función aleatoria $X(t)$. Entonces la función correlativa de la función aleatoria $Y(t)$ se determinará por la fórmula

$$K_y(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y(t)]\,[\varphi(x') - m_y(t')]\, f_2(x, x';\, t, t')\, dx\, dx'. \tag{4.2.29}$$

Es evidente que la función correlativa de la función aleatoria $Y(t)$ se puede determinar también por la fórmula (4.2.12), calculando previamente el momento inicial de segundo orden por la fórmula

$$\Gamma_y(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \quad \varphi(x') f_1(x, x'; t, t')\, dx\, dx'. \qquad (4.2.30)$$

Este procedimiento lleva de ordinario a cálculos más simples.

La primera fórmula de (4.2.28) determina la señal útil en la salida del elemento examinado y la segunda, el nivel de ruido en la salida del mismo.

Las fórmulas obtenidas en este ejemplo permiten examinar el paso conjunto de las señales útiles y las perturbaciones (ruidos) por cualesquiera elementos carentes de inercia de los sistemas automáticos.

Ejemplo 4.2.6. Examinemos un dispositivo que funciona de modo que, al actuar en la entrada un impulso momentáneo, la variable de salida adquiere un valor constante, proporcional a la magnitud del impulso de entrada, y queda

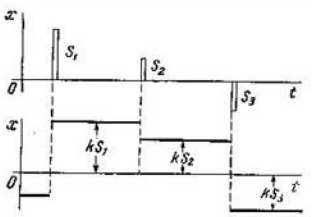


Fig. 4.2.6.

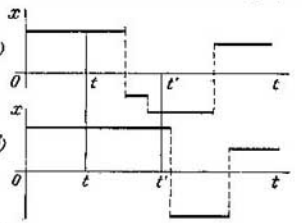


Fig. 4.2.7.

invariable hasta que acciona el impulso siguiente (fig. 4.2.6). Una vez recibido el impulso siguiente, la variable de salida cambia por un salto su valor y se hace proporcional a la magnitud de este impulso. Así pues, el dispositivo en cuestión transforma la sucesión de los impulsos en una función escalonada, en la cual la altura de cada escalón es proporcional al último impulso accionador. Supongamos ahora que a la entrada de tal dispositivo llega una secuencia de impulsos aleatorios (por ejemplo, el flujo de partículas cargadas con diferentes cargas). Hallar la esperanza matemática y la función correlativa de la variable de salida del dispositivo dado, suponiendo que los impulsos son magnitudes aleatorias independientes con esperanzas matemáticas iguales a cero y una misma dispersión D, mientras que los momentos de acción de los impulsos forman un flujo de Poisson con una densidad media constante (véase el § 2.6). En estas condiciones se puede considerar que el número de impulsos que actúan en el transcurso de cualquier lapso de tiempo se subordina a la ley de Poisson. Ahora bien, las realizaciones de la función aleatoria en la salida del dispositivo en cuestión serán funciones escalonadas con momentos independientes de paso de un escalón a otro y con alturas aleatorias de los escalones. La esperanza matemática de tal función aleatoria $X(t)$ es idénticamente igual a cero, puesto que las alturas de los escalones, proporcionales a los impulsos correspondientes, tienen esperanzas matemáticas iguales a cero.

Tomemos ahora dos instantes t y t' y hallemos el momento de correlación de las alturas de los escalones correspondientes a estos instantes de tiempo. Aquí son posibles dos casos (fig. 4.2.7):

1) en el intervalo de tiempo (t, t'), a la entrada llega, por lo menos, un impulso;

2) en el intervalo de tiempo (t, t') a la entrada no llega ningún impulso.

En el primer caso, las alturas de los escalones son magnitudes aleatorias independientes, ya que los impulsos, según la condición, son independientes uno del otro (fig. 4.2.7, *a*). En el segundo caso, los puntos t y t' se encuentran en el mismo escalón (fig. 4.2.7, *b*). Al deducir la fórmula para el momento de correlación, es necesario tener en cuenta ambos casos con las probabilidades correspondientes. Designemos por Y el número de impulsos que llegan a la entrada durante el intervalo de tiempo (t, t). Cuando $Y > 0$, en virtud de lo expuesto, el momento de correlación de las ordenadas de la función aleatoria en cuestión es igual a cero. Cuando $Y = 0$, tenemos que $X(t') = X(t)$ y, por consiguiente, el momento de correlación de las magnitudes $X(t)$ y $X(t')$ es igual a la dispersión de los impulsos D. La probabilidad de los acontecimientos $Y > 0$ y $Y = 0$ se puede calcular aplicando la ley de Poisson (2.6.13). Entonces obtendremos la siguiente expresión para la función correlativa de la función aleatoria escalonada que se examina:

$$K_x(t, t') = M[X(t)\,X(t')] =$$
$$= P(Y>0)\,M[X(t)\,X(t') \mid Y>0] + P(Y=0)\,M[X(t)\,X(t') \mid Y=0] =$$
$$= P(Y>0)\cdot 0 + P(Y=0)\,D = De^{-\mu|t-t'|},$$

donde μ es la densidad del flujo de impulsos, es decir, la cantidad media de impulsos que actúan en la unidad de tiempo. Ahora bien, la función correlativa de la función aleatoria en cuestión se determina por la fórmula

$$K_x(t, t') = De^{-\mu|t-t'|} \tag{4.2.31}$$

Vemos que también en el ejemplo dado se ha obtenido una función correlativa exponencial.

Ejemplo 4.2.7. Un condensador de capacidad C se carga por el flujo de partículas que tienen diferentes cargas, y en los intervalos entres los momentos de llegada de las partículas se descarga a través del resistor R (fig. 4.2.8). Hallar la esperanza matemática y la función correlativa de la corriente aleatoria que pasa por el resistor, si al condensador llegan, por término medio, μ partículas en la unidad de tiempo y las cargas de las partículas son magnitudes aleatorias independientes con las mismas esperanzas matemáticas q e iguales dispersiones D.

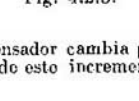


Fig. 4.2.8.

Designemos por Q_k la carga aleatoria de la k-ésima partícula y por T_k el momento aleatorio de su llegada al condensador. En el momento T_k la tensión u en el condensador cambia por un salto en Q_k/C después de lo cual la magnitud absoluta de este incremento u_k de la tensión disminuye según la ley exponencial

$$u_k = \frac{Q_k}{C}\, e^{-\frac{t-T_k}{RC}} \quad \text{siendo } t > T_k.$$

La corriente en el circuito, engendrada por la llegada al condensador de la k-ésima partícula, será igual a u_k/R. Por consiguiente, la corriente total en el circuito $I(t)$ en cualquier instante t se determinará por la fórmula

$$I(t) = \frac{1}{T} \sum_{T_k \leqslant t} Q_k e^{-\frac{t-T_k}{T}}. \tag{4.2.32}$$

donde la adición se extiende a todos los valores K correspondientes a las partículas que caen en el condensador hasta el instante t y $T = RC$ es la así llamada constante de tiempo del circuito.

Para resolver el problema planteado, primeramente examinemos sólo la parte de corriente en el circuito engendrada por las partículas que llegan al condensador durante un intervalo grande de tiempo finito (s, t) y luego pasemos al límite cuando $s \to -\infty$. Designemos por $I_s(t)$ la corriente en el circuito engendrada por las partículas que llegan al condensador en el transcurso del intervalo de tiempo (s, t). El número de partículas que llegan al condensador durante el intervalo de tiempo (s, t) se puede considerar subordinado a la ley de Poisson; en este caso, la esperanza matemática de este número de partículas, según los datos, es igual a $\mu(t-s)$. Por lo tanto, designando por E_m el acontecimiento consistente en que durante el intervalo de tiempo (s, t) al condensador llegan m partículas ($m = 0, 1, 2, \ldots$) y aplicando la fórmula (2.6.13), para la probabilidad de este acontecimiento obtendremos la fórmula

$$P(E_m) = \frac{[\mu(t-s)]^m}{m!} e^{-\mu(t-s)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.2.33}$$

En el caso cuando en el intervalo de tiempo (s, t) al condensador llegan m partículas, la corriente producida en el circuito por estas partículas se expresa por la fórmula

$$I_s(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n} Q_k e^{-\frac{t-T_k}{T}}. \tag{4.2.34}$$

Haciendo respecto al número de partículas que llegan al condensador en el intervalo de tiempo (s, t) todas las hipótesis posibles $m = 0, 1, 2, \ldots$ y aplicando la fórmula de la esperanza matemática completa (3.8.12), expresemos la esperanza matemática de la función aleatoria $I_s(t)$ por la fórmula

$$M[I_s(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} P(E_m) M[I_s(t) \mid E_m]. \tag{4.2.35}$$

La esperanza matemática condicional de la función aleatoria $I_s(t)$ para la hipótesis E_m debe calcularse hallando la media probabilística con respecto a todos los valores posibles de las cargas de las partículas Q_k y a todos los valores posibles de los momentos de llegada de las partículas al condensador T_k, siendo fijo el número m de partículas que actúan en el intervalo de tiempo (s, t). En virtud de los teoremas de adición y multiplicación de las esperanzas matemáticas, teniendo en consideración la independencia de las magnitudes aleatorias Q_k y T_k, podemos escribir

$$M[I_s(t) \mid E_m] = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{m} M\left[Q_k e^{-\frac{t-T_k}{T}}\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{m} M[Q_k] M\left[e^{-\frac{t-T_k}{T}}\right]. \tag{4.2.36}$$

Para calcular $M\{\exp\{-(t-T_k)/T\}\}$ para una partícula que actúa en el instante $t = T_k$ en el intervalo (s, t), es necesario, de acuerdo con la regla general, multiplicar los valores de la función exponencial, correspondiente a todos los valores posibles T_k en el intervalo (s, t), por los elementos respectivos de probabilidad e integrar. Como resultado obtendremos

$$M[\exp\{-(t-T_k)/T\}] \int_s^t \exp\{-(t-\tau)/T\} f(\tau)\, d\tau, \tag{4.2.37}$$

donde $f(\tau)$ es la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria T_k. En virtud de la constancia de la densidad media de los momentos de acción de las partículas, éstas, al ser muy grande su número, se reparten estadísticamente de un modo uniforme en el intervalo (s, t). Por consiguiente, la densidad de pro-

babilidad del momento de acción de cada partícula tomada por separado debe considerarse constante en el intervalo (s, t) : $f(\tau) = 1/(t-s)$. Sustituyendo esta expresión en (4.2.37), obtendremos

$$M\left[e^{-\frac{t-T_k}{T}}\right] = \frac{1}{t-s}\int_s^t e^{-\frac{t-\tau}{T}}\,d\tau = \frac{T}{t-s}\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right). \qquad (4.2.38)$$

Sustituyendo esta expresión en (4.2.36) y teniendo en cuenta que la esperanza matemática de la carga de cada partícula es igual a q, hallaremos la esperanza matemática condicional de la función aleatoria $I_s(t)$ para la hipótesis E_m:

$$M[I_s(t) \mid E_m] = \sum_{k=1}^{m} \frac{q}{t-s}\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right) = \frac{mg}{t-s}\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right). \qquad (4.2.39)$$

Sustituyendo las expresiones (4.2.33) y (4.2.39) en (4.2.35), hallamos la esperanza matemática de la función aleatoria $I_s(t)$:

$$M[I_s(t)] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\mu(t-s)]^m}{m!} e^{-\mu(t-s)} \frac{mq}{t-s}\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right) =$$

$$= \mu q e^{-\mu(t-s)}\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\mu(t-s)]^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Evidentemente que la suma de la serie en esta fórmula es igual a $e^{\mu(t-s)}$. Por lo tanto

$$M[I_s(t)] = \mu q\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right).$$

Al pasar al límite para $s \to -\infty$, hallamos la esperanza matemática de la corriente aleatoria $I(t)$ en el circuito:

$$m_i(t) = M[I(t)] = \mu q. \qquad (4.2.40)$$

Para hallar la función correlativa de la corriente aleatoria en el circuito, observemos que si $t' > t$

$$I(t') = \frac{1}{T}\sum_{T_k \leqslant t'} Q_k e^{-\frac{t'-T_k}{T}} = \frac{1}{T}\sum_{T_k \leqslant t} Q_k e^{-\frac{t'-T_k}{T}} + \frac{1}{T}\sum_{t < T_k \leqslant t'} Q_k e^{-\frac{t'-T_k}{T}} =$$

$$= I(t)\, e^{-\frac{t'-t}{T}} + \frac{1}{T}\sum_{t < T_k \leqslant t'} Q_k e^{-\frac{t'-T_k}{T}}.$$

Aquí el primer sumando se diferencia de $I(t)$ solamente por el multiplicador no aleatorio y el segundo sumando es independiente de $I(t)$, ya que contiene solamente magnitudes aleatorias independientes de las magnitudes aleatorias que entran en la expresión (4.2.32) para $I(t)$. Por eso, cuando $t' > t$, la función correlativa de la corriente $I(t)$ es igual al momento de correlación de las magnitudes aleatorias $I(t)$ y $I(t)$ exp $\{-(t'-t)/T\}$ para los valores dados t y t', es decir,

$$K_i(t, t') = D[I(t)]\, e^{-\frac{t'-t}{T}}. \qquad (4.2.41)$$

Ahora nos queda solamente calcular la dispersión de la corriente $I(t)$. La dispersión condicional de la función aleatoria $I_s(t)$ para la hipótisis consistente en que en el intervalo de tiempo (s, t) al condensador llegan m partículas, es igual a la suma de las dispersiones de los sumandos en la fórmula (4.2.34) en virtud de la independencia de los mismos. Para hallar la dispersión de un sumando en (4.2.34) calculemos primeramente su momento inicial de segundo orden. Según el teorema de multiplicación de las esperanzas matemáticas

$$M\left[Q_k^2 e^{-2\frac{t-t_k}{T}}\right] = M\left[a_k^2\right] M\left[e^{-2\frac{t-T_k}{T}}\right].$$

Luego, en virtud de la conocida correlación entre la dispersión de la magnitud aleatoria y su momento inicial de segundo orden [fórmula (2.3.11)],

$$M\left[Q_k^2\right] = q^2 + D,$$

y la esperanza matemática de la función exponencial se calcula de la misma manera que se dedujo la fórmula (4.2.38). De aquí, valiéndonos de nuevo de la correlación entre la dispersión y el momento inicial de segundo orden y teniendo en cuenta que la expresión para la dispersión condicional de la función aleatoria $I_s(t)$, dada la hipótesis E_m, contiene m sumandos iguales, obtendremos

$$D\left[I_s(t)\right] E_m] = \frac{m(q^2+D)}{2T}\left(1-e^{-2\frac{t-s}{T}}\right) - \frac{mq^2}{(t-s)^2}\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right)^2.$$

Multiplicando esta expresión por la probabilidad de la hipótesis E_m, que se determina por la fórmula (4.2.33), y sumando con respecto a todos los valores posibles de m, hallaremos la dispersión no condicional de la función aleatoria $I_s(t)$:

$$D\left[I_s(t) = \frac{\mu(q^2+D)}{2T}\left(1-e^{-2\frac{t-s}{T}}\right) - \frac{\mu q^2}{t-s}\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right)^2.$$

Pasando en esta fórmula al límite para $s \to -\infty$, hallamos la dispersión buscada de la corriente aleatoria que circula en el circuito $I(t)$:

$$D[I(t)] = \frac{\mu(q^2+D)}{2T}. \qquad (4.2.42)$$

Por fin, sustituyendo esta expresión en la fórmula (4.2.41), obtendremos

$$K_I(t, t') = \frac{\mu(q^2+D)}{2T} e^{-\frac{t'-t}{T}} \text{ siendo } t' > t.$$

Es evidente que cuando $t' < t$, la diferencia $t' - t$ en el exponente se sustituirá por $t - t'$. Como resultado, la función correlativa de la corriente aleatoria en el circuito dado $I(t)$ se expresará, para todos los valores t y t', por la fórmula

$$K_I(t, t') = \frac{\mu(q^2+D)}{2T} e^{-\frac{|t-t'|}{T}} \text{ siendo } t' < t. \qquad (4.2.43)$$

De este modo, así como en los ejemplos 4.2.3 y 4.2.6, hemos obtenido de nuevo una función correlativa exponencial. No obstante, las realizaciones posibles de las funciones aleatorias examinadas en estos tres ejemplos tienen un carácter completamente diferente. En el ejemplo 4.2.3 todas las realizaciones posibles de la función aleatoria representan sinusoides de diferentes frecuencias, amplitudes y fases iniciales. En el ejemplo 4.2.6 todas las realizaciones posibles de la función aleatoria son funciones escalonadas. En el ejemplo dado todas las realizaciones posibles de la función aleatoria representan funciones discontinuas cuya forma se muestra en la fig. 4.2.9. En el ejemplo 4.2.3 la rapidez de dis-

minución de la función correlativa al crecer la magnitud absoluta de la diferencia de los argumentos, se determina por la magnitud α que caracteriza la gama de los valores prácticamente posibles de la frecuencia de oscilación. En el ejemplo anterior la rapidez de disminución de la función correlativa se determina completamente por la frecuencia media de los impulsos μ. En este ejemplo la rapidez de disminución de la función correlativa no depende en absoluto de la frecuencia media de los impulsos μ y se determina solamente por la constante de tiempo del circuito T. Así pues, los resultados de estos tres ejemplos muestran que una misma función correlativa puede corresponder a diferentes funciones aleatorias, el carácter de las realizaciones posibles de las cuales es absolutamente distinto.

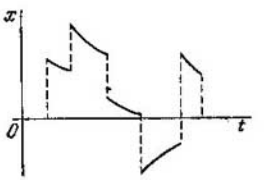


Fig. 4.2.9.

A título de un ejercicio útil, proponemos que el lector resuelva por sí mismo este problema para otros circuitos eléctricos, por ejemplo, para el caso en que el circuito a través del cual se descarga el condensador tiene no sólo una resistencia óhmica R sino también la inductancia L. En el último caso la función correlativa de la corriente que pasa por el circuito representará el producto de la función exponencial amortiguada por la función periódica de la magnitud absoluta de la diferencia de los argumentos de la forma

$$K_i(t, t') = D_i e^{-\alpha|t-t'|}\left[\cos\omega_0(t-t') + \frac{\alpha}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0|t-t'|\right]. \quad (4.2.44)$$

La función aleatoria examinada en este ejemplo representa el así llamado *efecto de granalla*, corriente de ruido engendrada en los circuitos eléctricos por el bombardeo de electrones y otras partículas cargadas.

Los resultados obtenidos en los ejemplos anteriores muestran que la función correlativa está lejos de ser una característica completa de la función aleatoria. En particular, ella no determina de ningún modo el carácter de las realizaciones posibles de la función aleatoria. No obstante, para resolver muchos problemas prácticos, el conocimiento de la esperanza matemática y la función correlativa de una función aleatoria resulta ser suficiente.

En los capítulos anteriores vimos que la ley normal de distribución se determina completamente por los momentos de primer y segundo orden de las magnitudes aleatorias. Por eso, conociendo la esperanza matemática y la función correlativa de una función aleatoria normalmente repartida, se puede determinar todas sus densidades de probabilidad de cualesquiera órdenes. Ahora bien, para una función aleatoria normalmente repartida, son la esperanza matemática y la función correlativa las que determinan por completo todas las características probabilísticas de la misma. Puesto que para determinar la esperanza matemática y la función correlativa es suficiente conocer la densidad bidimensional de probabilidad de la función aleatoria, dicha densidad es una característica completa de la función aleatoria normalmente repartida.

§ 4.3. Propiedades de la función correlativa

De la definición (4.2.6) de la función correlativa se deriva directamente que ésta es simétrica:

$$K_x(t, t') = K_x(t', t). \qquad (4.3.1$$

Gráficamente esta propiedad significa (fig. 4.3.1) que en los puntos simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo de coordenadas la función correlativa tiene valores iguales. Esto quiere decir que la

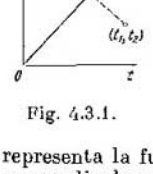


Fig. 4.3.1.

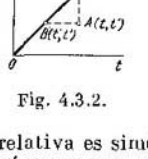


Fig. 4.3.2.

superficie que representa la función correlativa es simétrica con respecto al plano perpendicular al plano t, t' y que pasa por la bisectriz mencionada.

La segunda propiedad de la función correlativa se deriva de la propiedad (3.9.15) del momento de correlación; la función, correlativa, cualesquiera que sean los valores de los argumentos t, t', no supera en módulo a la raíz cuadrada del producto de los valores de la dispersión de la función aleatoria, correspondientes a los valores t y t' del argumento:

$$|K_x(t, t')| \leqslant \sqrt{D_x(t)\, D_x(t')} = \sqrt{K_x(t, t)\, K_x(t', t')}. \qquad (4.3.2)$$

Esto significa que la magnitud absoluta de la función correlativa en cualquier punto A no puede ser mayor que la media geométrica de sus valores en los puntos B y C de la bisectriz del ángulo de coordenadas, obtenidos como resultado de la intersección de dicha bisectriz con rectas trazadas desde el punto A paralelamente a los ejes de coordenadas (fig. 4.3.2).

Para cualquier función no aleatoria $\varphi(t)$ tiene lugar la desigualdad

$$\int_a^b \int_a^b K_x(t, t')\, \varphi(t)\, \varphi(t')\, dt\, dt' \geqslant 0. \qquad (4.3.3)$$

Las funciones de dos variables que poseen esta propiedad se llaman *definidas no negativas*. Así pues, la función correlativa de una función aleatoria es una función determinada no negativa. En este caso, la función $K_x(t, t')$ puede tener valores negativos para ciertos valores de los argumentos t, t', pero la integral (4.3.3) nunca será negativa.

Para demostrar la desigualdad (4.3.3) sustituyamos en (4.3.3) la expresión (4.2.6) de la función correlativa. Entonces obtendremos

$$J = \int_a^b \int_a^b K_x(t, t')\,\varphi(t)\,\varphi(t')\,dt\,dt' =$$

$$= \int_a^b \int_a^b M[X^0(t)\,X^0(t')]\,\varphi(t)\,\varphi(t')\,dt\,dt'. \quad (4.3.4)$$

Pero la integral es el límite de una secuencia de sumas. Según el teorema de adición de las esperanzas matemáticas, la esperanza matemática de la suma siempre es igual a la suma de las esperanzas matemáticas, es decir, el orden, de operaciones de adición y de la esperanza matemática siempre se puede cambiar. Esto es válido para todas las sumas de una secuencia. Prácticamente esto siempre es válido también en el límite. Así pues, se puede cambiar el orden de operaciones de integración y de esperanza matemática. Cumpliendo esto en (4.3.4), obtendremos

$$J = M\left[\int_a^b \int_a^b X^0(t)\,X^0(t')\,\varphi(t)\,\varphi(t')\,dt\,dt'\right].$$

Aquí la función subintegral se descompone en multiplicadores cada uno de los cuales depende de una sola variable. En este caso, la doble integral puede ser sustituida por el producto de dos integrales. Puesto que en lo sucesivo aplicaremos con frecuencia esta transformación de la doble integral, vamos a cumplirla detalladamente. Sacando las funciones de la variable t' fuera del signo de integral con respecto a la variable t, obtendremos

$$J = M\left[\int_a^b X^0(t')\,\varphi(t')\left\{\int_a^b X^0(t)\,\varphi(t)\,dt\right\}dt'\right].$$

Dado que los límites de integración a, b son constantes, la integral con respecto a la variable t representa una magnitud constante y puede ser sacada fuera del signo de la integral con respecto a t'.

$$J = M\left[\int_a^b X^0(t)\,\varphi(t)\,dt \int_a^b X^0(t')\,\varphi(t')\,dt'\right]. \quad (4.3.5)$$

Puesto que la integral definida no depende de la designación de la variable de integración, la segunda integral en (4.3.5) representa una magnitud que coincide con la primera integral. Por eso, sustituyendo en la segunda integral la variable de integración t' por la

variable t, obtendremos

$$J = M\left[\left\{\int_a^b X^0(t)\,\varphi(t)\,dt\right\}^2\right]. \qquad (4.3.6)$$

Es evidente que esta magnitud no puede ser negativa, lo que demuestra la validez de la desigualdad (4.3.3).

Es fácil también ver que la función correlativa no cambia, si a la función aleatoria se le añade cualquier función no aleatoria. Con otras palabras, dos funciones aleatorias cuya diferencia no es aleatoria tienen una misma función correlativa. En efecto, si $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, entonces $m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t)$ y $Y^0(t) = X^0(t)$, es decir, las funciones aleatorias centradas Y^0 y X^0 coinciden. De aquí, así como de la definición (4.2.6), se desprende directamente que las funciones correlativas de las funciones aleatorias Y y X son idénticamente iguales una a otra, que es lo que se trataba de demostrar.

Luego, al multiplicar la función aleatoria $X(t)$ por la no aleatoria $\varphi(t)$, la función correlativa se multiplica por $\varphi(t)\,\varphi(t')$. En efecto, si $Y(t) = \varphi(t)\,X(t)$, entonces $m_y(t) = \varphi(t)\,m_x(t)$, $Y^0(t) = \varphi(t)\,X^0(t)$ y

$$K_y(t, t') = M[Y^0(t)\,Y^0(t')] = \varphi(t)\,\varphi(t')\,M[X^0(t)\,X^0(t')] = \varphi(t)\,\varphi(t')\,K_x(t, t'). \qquad (4.3.7)$$

Es fácil ver que las propiedades demostradas, salvo la (4.3.7), las posee también la función correlativa normada de la función aleatoria. Con ello, en virtud de que la función correlativa normada es igual a la unidad para cualesquiera valores iguales de sus argumentos $t' = t$ (es decir, en la bisectriz del ángulo de coordenadas del plano t, t'), la segunda propiedad de (4.3.2) para la función correlativa normada da

$$|R_x(t, t')| \leqslant 1. \qquad (4.3.8)$$

Esta desigualdad es también un corolario directo de la propiedad (3.9.23) del coeficiente de correlación.

§ 4.4. Función correlativa recíproca y sus propiedades

En muchos problemas prácticos se necesita examinar conjuntamente varias funciones aleatorias. Para la característica conjunta completa de dos (o de un número mayor) funciones aleatorias, es necesario asignar también, además de las densidades de probabilidad de cada una de ellas, todas las densidades de probabilidad conjuntas de sus valores siendo elegidos arbitrariamente los valores de los argumentos. La más simple de las densidades de probabilidad conjuntas de dos funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$ es *la densidad*

bidimensional conjunta de probabilidad $f_{11}(x, y; t, t')$ de sus valores $X(t)$ y $Y(t)$, siendo arbitrariamente escogidos los valores de los argumentos t, t'. Esta densidad de probabilidad depende de t y t' como de los parámetros.

Para caracterizar la relación de dos funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$, se usa generalmente *la función correlativa recíproca* de las mismas, la cual se determina como el momento de correlación de los valores de estas dos funciones aleatorias, correspondientes a los valores elegidos arbitrariamente de los argumentos t y t'

$$K_{xy}(t, t') = M[X^{\circ}(t) Y^{\circ}(t)]. \tag{4.4.1}$$

La función correlativa recíproca es función correlativa de las variables t y t'.

Si es conocida la densidad bidimensional conjunta de probabilidad $f_{11}(x, y; t, t')$ de las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$, su función correlativa recíproca se puede calcular por la fórmula

$$K_{xy}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)][y - m_y(t')] f_{11}(x, y; t, t')\, dx\, dy. \tag{4.4.2}$$

Sin embargo, en muchos problemas prácticos resulta posible calcular la función correlativa recíproca por procedimientos más simples sin recurrir al cálculo de la doble integral (4.4.2).

Si la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$ no es idénticamente igual a cero, entonces las funciones $X(t)$ y $Y(t)$ se llaman *correlacionadas*. Al contrario, si la función correlativa recíproca de dos funciones aleatorias es idénticamente igual a cero, estas últimas se denominan *no correlacionadas*.

Semejantemente a como se dedujeron las propiedades de la función correlativa, se demuestran las siguientes propiedades de la función correlativa recíproca.

Al permutar simultáneamente los argumentos e índices, la función correlativa recíproca no cambia:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \tag{4.4.3}$$

Aquí se trata de dos funciones correlativas recíprocas y la igualdad significa que, al permutar los argumentos, una función correlativa recíproca pasa a otra función correlativa recíproca de las mismas funciones aleatorias tomadas en el orden inverso. Demos la interpretación geométrica de esta propiedad. Para ello construyamos dos superficies en el sistema de coordenadas cartesianas ξ, η, ζ:

$$\zeta = K_{xy}(\xi, \eta), \qquad \zeta = K_{yx}(\xi, \eta). \tag{4.4.4}$$

Estas superficies representan las funciones correlativas recíprocas de las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t')$ tomadas en diferentes órde-

nes. Tomemos dos puntos (t, t') y (t', t) simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo de coordenadas. Cada una de las superficies (4.4.4) es, en el caso general, no simétrica con relación a la bisectriz del ángulo de coordenadas. No obstante, la igualdad (4.4.3) muestra que estas superficies representan una reflexión especular recíproca con respecto al plano que pasa por la bisectriz del ángulo de coordenadas $\xi O\eta$ y el eje $O\zeta$. Así pues, las Z-coordenadas de la primera superficie en el punto (t, t') y de la segunda en el punto (t', t) son iguales.

La segunda propiedad de la función correlativa recíproca se deduce de la desigualdad (3.9.15), válida para cualquier momento de correlación. De esta desigualdad se deduce que la magnitud absoluta de la función correlativa recíproca de dos funciones aleatorias no puede ser mayor que la media geométrica de las dispersiones de estas últimas:

$$|K_{xy}(t, t')| \leqslant \sqrt{D_x(t) D_y(t')} = \sqrt{K_x(t, t) K_y(t', t')}. \quad (4.4.5)$$

En el párrafo anterior fue demostrado que al añadir a la función aleatoria cualquier función no aleatoria, la función aleatoria centrada no cambia. De aquí y de la definición (4.4.1) se deduce que la función correlativa recíproca de dos funciones aleatorias no cambia al adicionar a estas últimas funciones no aleatorias arbitrarias.

A veces, en vez de la función correlativa recíproca, para caracterizar la relación entre dos funciones aleatorias se usa *la función correlativa recíproca normada* que se determina como el coeficiente de correlación de los valores de estas dos funciones aleatorias, correspondientes a los valores elegidos arbitrariamente de sus argumentos:

$$R_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_y(t')}} = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{K_x(t, t) K_y(t', t')}}. \quad (4.4.6)$$

Es evidente que la función correlativa recíproca normada posee todas las propiedades demostradas de las funciones correlativas recíprocas, salvo la desigualdad (4.4.5) que, en virtud de (3.9.23), se sustituye por la desigualdad

$$|R_{xy}(t, t')| \leqslant 1. \quad (4.4.7)$$

Para la exposición sucesiva necesitamos introducir todavía el momento inicial de segundo orden de dos funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$, el cual se determina como el momento inicial mixto de segundo orden de sus valores, siendo elegidos arbitrariamente los valores de los argumentos t t':

$$\Gamma_{xy}(t, t') = M[X(t) Y(t')]. \quad (4.4.8)$$

En virtud de la fórmula (3.9.13), el momento inicial recíproco de segundo orden se expresa por las esperanzas matemáticas de las

funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t')$ y la función correlativa recíproca de las mismas:

$$\Gamma_{xy}(t, t') = m_x(t)\, m_y(t') + K_{xy}(t, t'). \qquad (4.4.9)$$

Hemos determinado la función correlativa recíproca y el momento inicial recíproco de segundo orden para las funciones aleatorias reales. En virtud de la definición (3.7.6) del momento de correlación de las magnitudes aleatorias complejas, la función correlativa recíproca de dos funciones aleatorias complejas $X(t)$ y $Y(t)$ se determina por la fórmula

$$K_{xy}(t, t') = M[X^0(t)\,\overline{Y^0(t')}]. \qquad (4.4.10)$$

Por una fórmula análoga se determina también el momento inicial recíproco de las funciones aleatorias complejas $X(t)$ y $Y(t)$.

Ejemplo 4.4.1. Hallar la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu f_\nu(t), \quad Y(t) = \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu g_\nu(t), \qquad (4.4.11)$$

donde $U_1, \ldots, U_n$ son magnitudes aleatorias y $f_1, \ldots, f_n$, $g_1, \ldots, g_n$ son ciertas funciones completamente determinadas, en el caso general, complejas.

Las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$ son funciones lineales de unas mismas magnitudes aleatorias $U_1, \ldots, U_n$. Por consiguiente, aplicando la fórmula (3.9.6) para el momento de correlación de dos funciones lineales de las magnitudes aleatorias, obtendremos

$$K_{xy}(t, t') = \sum_{\nu,\,\mu=1}^{n} k_{\nu\mu} f_\nu(t)\,\overline{g_\mu(t')}, \qquad (4.4.12)$$

donde $k_{\nu\mu}$ es el momento de correlación de las magnitudes aleatorias

$$U_\nu, U_\mu \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n; \quad k_{\nu\nu} = D_{x_\nu}).$$

Si, en el caso particular, las magnitudes $U_1, \ldots, U_n$ no están correlacionadas, entonces

$$K_{xy}(t, t') = \sum_{\nu=1}^{n} D_{x_\nu} f_\nu(t)\,\overline{g_\nu(t')}. \qquad (4.4.13)$$

Ejemplo 4.4.2. Hallar la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias

$$X(t) = \varphi(t, U, \ldots, U_n), \quad Y(t) = \psi(t, U_1, \ldots, U_n), \qquad (4.4.14)$$

considerando conocida la densidad de probabilidad de las magnitudes aleatorias $U_1, \ldots, U_n$.

Conforme a la definición general de la esperanza matemática de una función arbitraria de las magnitudes aleatorias podemos escribir

$$\Gamma_{xy}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, u_1, \ldots, u_n)\,\overline{\psi(t', u_1, \ldots, u_n)} \times$$

$$\times f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n. \qquad (4.4.15)$$

Luego, por la fórmula (4.4.9), se puede calcular $K_{xy}(t, t')$.

§ 4.5. Adición de funciones aleatorias

Examinemos la función aleatoria $Z(t)$ que representa la suma de las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$:

$$Z(t) = X(t) + Y(t). \tag{4.5.1}$$

Supongamos que son conocidas las esperanzas matemáticas $m_x(t)$, $m_y(t)$, las funciones correlativas $K_x(t, t')$, $K_y(t, t')$ de las magnitudes aleatorias $X(t)$, $Y(t)$ y su función correlativa recíproca $K_{xy}(t, t')$. El problema consiste en hallar la esperanza matemática y la función correlativa de la función aleatoria $Z(t)$.

La esperanza matemática de la función aleatoria $Z(t)$ se determina directamente por el teorema de adición de las esperanzas matemáticas. Como resultado obtendremos

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t). \tag{4.5.2}$$

Sustrayendo esta fórmula de (4.5.1), obtenemos la relación entre las funciones aleatorias centradas

$$Z^\circ(t) = X^\circ(t) + Y^\circ(t). \tag{4.5.3}$$

Aplicando esta fórmula, hallamos que

$$Z^\circ(t)\,Z^\circ(t') = X^\circ(t)\,X^\circ(t') + Y^\circ(t)\,Y^\circ(t') + X^\circ(t)\,Y^\circ(t') + Y^\circ(t)\,X^\circ(t'). \tag{4.5.4}$$

De aquí, teniendo en consideración las definiciones (4.2.6) y (4.4.1) de las funciones correlativa y correlativa recíproca, obtendremos la siguiente fórmula para la función correlativa de la función aleatoria Z:

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + K_{xy}(t, t') + K_{yx}(t, t'). \tag{4.5.5}$$

En virtud de la propiedad (4.4.3) de las funciones correlativas recíprocas, la fórmula (4.5.5) se puede escribir en la forma

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + K_{xy}(t, t') + K_{xy}(t', t). \tag{4.5.6}$$

En el caso particular, cuando las funciones aleatorias X y Y no están correlacionadas, $K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t, t') = 0$ y la fórmula (4.5.6) toma la forma

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t'). \tag{4.5.7}$$

Ahora bien, la función correlativa de la suma de las funciones aleatorias no correlacionadas es igual a la suma de las funciones correlativas de los sumandos.

Las fórmulas obtenidas se hacen fácilmente extensivas a cualquier número de sumandos. La esperanza matemática de la suma de las funciones aleatorias

$$Z(t) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(t), \tag{4.5.8}$$

es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de los sumandos:

$$M_z(t) = \sum_{\nu=1}^{n} m_{x_\nu}(t). \tag{4.5.9}$$

La función correlativa de la suma es igual a la suma de las funciones correlativas y de todas las funciones correlativas recíprocas de los sumandos:

$$K_z(t, t') = \sum_{\nu,\,\mu=1}^{n} K_{x_\nu x_\mu}(t, t'), \tag{4.5.10}$$

donde $K_{x_\nu x_\mu}(t, t')$ es la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias $X_\nu(t)$ y $X_\mu(t)$ [que coincide para $\mu = \nu$ con la correlativa $K_{x_\nu}(t, t')$ de la función aleatoria $X_\nu(t)$].

En el caso particular en que las funciones aleatorias $X_1(t)$, ... , $X_n(t)$ no están correlacionadas, todas sus funciones correlativas recíprocas son iguales a cero y la fórmula (4.5.10) toma una forma más simple

$$K_z(t, t') = \sum_{\nu=1}^{n} K_{x_\nu}(t, t'). \tag{4.5.11}$$

§ 4.6. Derivación de una función aleatoria

Examinemos la función aleatoria $X(t)$, todas las realizaciones posibles de la cual son funciones diferenciables. Entonces la derivada de la función aleatoria $X(t)$

$$Y_1(t) = X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} \tag{4.6.1}$$

representará la función aleatoria cuyas realizaciones posibles son las derivadas de las correspondientes realizaciones de la función aleatoria $X(t)$. Hallemos la esperanza matemática y la función correlativa de la derivada $Y_1(t)$ suponiendo conocidas la esperanza matemática y la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$.

Como para cualquier t fijo la magnitud aleatoria

$$Y_\Delta(t) = \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta T}$$

representa la combinación lineal de las magnitudes aleatorias $X(t + \Delta t)$ y $X(t)$, entonces, aplicando la fórmula (3.8.9), obten-

dremos

$$m_{v_\Delta}(t) = \frac{m_x(t+\Delta t) - m_x(t)}{\Delta t}.$$

De aquí, al pasar al límite para $\Delta t \to \infty$, suponiendo, desde luego, que este límite existe, obtendremos

$$m_{v_1}(t) = m_x'(t). \tag{4.6.2}$$

Así pues, la esperanza matemática de la derivada de una función aleatoria es igual a la derivada de su esperanza matemática. Con otras palabras, las operaciones de derivación y de esperanza matemática se puede cambiar de lugares.

Pasamos ahora a la determinación de la función correlativa de la derivada $Y_1(t)$ de la función aleatoria $X(t)$. Conforme a la determinación (4.2.6) tenemos que

$$K_{v_1}(t, t') = M\left[\frac{dX^0(t)}{dt}\frac{dX^0(t')}{dt'}\right] =$$

$$= M\left[\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t'}\{X^0(t)\,X^0(t')\}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t'} M[X^0(t)\,X^0(t')].$$

o bien

$$K_{v_1}(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t\,\partial t'}. \tag{4.6.3}$$

Ahora bien, la función correlativa de la derivada de la función aleatoria es igual a la segunda derivada mixta de su función correlativa.

De un modo semejante hallamos la función correlativa recíproca de la función aleatoria $X(t)$ y de su derivada $Y_1(t)$. De acuerdo con la definición (4.4.1) tenemos que

$$K_{xv}(t, t') = M\left[X^0(t)\frac{dX^0(t')}{dt'}\right] =$$

$$= M\left[\frac{\partial}{\partial t'}\{X^0(t)\,X^0(t')\}\right] = \frac{\partial}{\partial t'} M[X^0(t)\,X^0(t')]$$

o bien

$$K_{xv_1}(t, t') = \frac{\partial K_x(t, t')}{\partial t'}. \tag{4.6.4}$$

Así pues, la función correlativa recíproca de la función aleatoria $X(t)$ y de su derivada es igual a la derivada parcial de la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ con respecto al segundo argumento.

En virtud de (4.6.4), la fórmula (4.6.3) se puede también escribir en la forma

$$K_{v_1}(t, t') = \frac{\partial K_{xv_1}(t, t')}{\partial t}. \tag{4.6.5}$$

De un modo completamente análogo se puede hallar la esperanza matemática y la función correlativa de la derivada de cualquier orden p de la función aleatoria $X(t)$:

$$Y_p(t) = X^{(p)}(t).$$

Como resultado obtendremos las fórmulas siguientes para la esperanza matemática y la función correlativa de la derivada de orden p de la función aleatoria $X(t)$:

$$m_{y_p}(t) = m_x^{(p)}(t), \tag{4.6.6}$$

$$K_{y_p}(t, t') \frac{\partial^{2p} K_x(t, t')}{\partial t^p \partial t'^p}. \tag{4.6.7}$$

De un modo semejante se deduce la fórmula para la función correlativa recíproca de las derivadas de los órdenes p y q de la función aleatoria $X(t)$:

$$K_{y_p y_q}(t, t') = \frac{\partial^{p+q} K_x(t, t')}{\partial t^p \partial t'^q}. \tag{4.6.8}$$

Ejemplo 4.6.1. Hallar la esperanza matemática y la función correlativa de la derivada de la función aleatoria $X(t)$, si

$$\left.\begin{aligned} m_x(t) &= a + bt + ct^2, \\ K_x(t, t') &= De^{-\alpha|t-t'|}\left[\cos\omega_0(t-t') + \frac{\alpha}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0|t-t'|\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4.6.9}$$

Por la fórmula (4.6.2) hallamos la esperanza matemática de la derivada $Y_1(t) = X'(t)$:

$$m_{y_1}(t) = m_x'(t) = b + 2ct. \tag{4.6.10}$$

Para hallar la función correlativa de la derivada, determinamos primeramente la función correlativa recíproca de la función aleatoria $X(t)$ y su derivada. Aplicando la fórmula (4.6.4), obtendremos:

1) si $t' > t$

$$K_{xy_1}(t, t') = D\frac{\partial}{\partial t'}\left\{e^{-\alpha(t'-t)}\left[\cos\omega_0(t'-t) + \frac{\alpha}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0(t-t')\right]\right\} =$$

$$= -D\frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\omega_0}e^{-\alpha(t'-t)}\operatorname{sen}\omega_0(t'-t);$$

2) si $t' < t$

$$K_{xy_1}(t, t') = D\frac{\partial}{\partial t'}\left\{e^{-\alpha(t-t')}\left[\cos\omega_0(t-t') + \frac{\alpha}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0(t-t')\right]\right\} =$$

$$= D\frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\omega_0}e^{-\alpha(t-t')}\operatorname{sen}\omega_0(t-t').$$

De este modo, para cualesquiera t y t'

$$K_{xy_1}(t, t') = D\frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\omega_0}e^{-\alpha|t-t'|}\operatorname{sen}\omega_0(t-t'). \tag{4.6.11}$$

Ahora se puede determinar por la fórmula (4.6.5) la función correlativa de la derivada $Y_1(t) = X'(t)$; como resultado obtendremos

1) si $t < t'$

$$K_{y_1}(t, t') = D(\alpha^2 + \omega_0^2) e^{-\alpha(t'-t)} \left[\cos \omega_0 (t-t') + \frac{\alpha}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 (t-t')\right];$$

2) si $t > t'$

$$K_{y_1}(t, t') = D(\alpha^2 + \omega_0^2) e^{-\alpha(t-t')} \left[\cos \omega_0 (t-t') - \frac{\alpha}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 (t-t')\right].$$

Todas estas fórmulas se pueden reducir a una sola fórmula válida para todos los t y t':

$$K_{y_1}(t, t') = D(\alpha^2 + \omega_0^2) e^{-\alpha|t-t'|} \left[\cos \omega_0 (t-t') - \frac{\alpha}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 |t-t'|\right]. \quad (4.6.12)$$

Ejemplo 4.6.2. Hallar la esperanza matemática y la función correlativa de la derivada de la función aleatoria $X(t)$, si

$$m_x(t) \equiv 0, \qquad K_x(t, t') = De^{-\alpha|t-t'|}. \quad (4.6.13)$$

En virtud de la fórmula (4.6.2) la esperanza matemática de la derivada de la función aleatoria que se examina es idénticamente igual a cero. La fórmula (4.6.4) da

si $t < t'$

$$\left.\begin{aligned} K_{xy_1'}(t, t') &= D\frac{\partial}{\partial t'} e^{-\alpha(t'-t)} = -D\alpha e^{-\alpha(t'-t)}, \\ &\text{si } t' < t \\ K_{xy_1}(t, t') &= D\frac{\partial}{\partial t'} e^{-\alpha(t-t')} = D\alpha e^{-\alpha(t-t')}. \end{aligned}\right\} \quad (4.6.14)$$

Así pues, la función correlativa recíproca de la función aleatoria $X(t)$ y de su derivada tiene en este caso discontinuidad de primer género para $t = t'$ con un salto igual a $2D\alpha$ (fig. 4.6.1). Es fácil comprender que restando de esta función la función escalonada unitaria $\mathbf{1}(t-t')$ multiplicada por $2D\alpha$, obtendremos una función continua que designaremos por $f(t, t')$. Ahora bien, la función correlativa recíproca de la función aleatoria $X(t)$ y de su derivada puede ser presentada en este caso por la fórmula

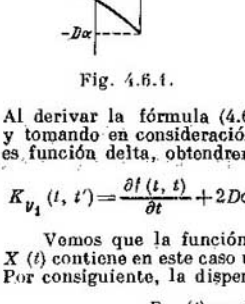


Fig. 4.6.1.

$$K_{xy_1}(t, t') = f(t, t') + 2D\alpha \mathbf{1}(t-t'), \quad (4.6.15)$$

donde $f(t, t')$ es una función continua que se determina por la fórmula

$$f(t, t') = \begin{cases} 2D\alpha - D\alpha e^{-\alpha(t'-t)} & \text{si } t < t', \\ D\alpha e^{-\alpha(t-t')} & \text{si } t > t'. \end{cases} \quad (4.6.16)$$

Al derivar la fórmula (4.6.15) con respecto a t, teniendo en cuenta (4.6.16) y tomando en consideración que la derivada de la función escalonada unitaria es función delta, obtendremos en virtud de (4.6.5)

$$K_{y_1}(t, t') = \frac{\partial f(t, t)}{\partial t} + 2D\alpha \mathbf{1}'(t-t') = -D\alpha^2 e^{-\alpha|t-t'|} + 2D\alpha\delta(t-t'). \quad (4.6.17)$$

Vemos que la función correlativa de la derivada de la función aleatoria $X(t)$ contiene en este caso un sumando proporcional a la función delta $\delta(t-t')$. Por consiguiente, la dispersión de la derivada en el caso dado es infinita:

$$D_{y_1}(t) = K_{y_1}(t, t) = -D\alpha^2 + 2D\alpha\delta(0) = \infty.$$

Esto es fácil comprender ya que la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ no tiene en este caso la segunda derivada mixta, en sentido común, para $t' = t$ y, por lo tanto, la función $X(t)$ no es diferenciable en el sentido corriente. Por eso en la expresión de la función correlativa de la derivada ha entrado precisamente la función delta.

§ 4.7. Integración de una función aleatoria

Examinemos la función aleatoria de la variable s:

$$Y(s) = \int_a^b g(s, t) X(t)\, dt, \tag{4.7.1}$$

donde $g(s, t)$ es la función (no aleatoria) asignada. Supongamos que son conocidas $m_x(t)$ y $K_x(t, t')$ y hallemos la esperanza matemática $m_y(s)$ y la función correlativa $K_y(s, s')$ de la función aleatoria $Y(s)$, así como su función correlativa recíproca con $X(t)$.

Dado que, según lo demostrado en el § 4.3, las operaciones de esperanza matemática e integración se pueden permutar, entonces

$$M[Y(s)] = M\left[\int_a^b g(s, t) X(t)\, dt\right] = \int_a^b g(s, t) M[X(t)]\, dt,$$

o bien

$$m_y(s) = \int_a^b g(s, t) m_x(t)\, dt. \tag{4.7.2}$$

Esta fórmula es la generalización de la fórmula (3.8.9) para la esperanza matemática de la función lineal de magnitudes aleatorias corrientes.

Luego, sustrayendo (4.7.2.) de (4.7.1), obtendremos

$$Y^0(s) = \int_a^b g(s, t) X^0(t)\, dt.$$

Según la definición de la función correlativa (4.2.6) tenemos

$$K_y(s, s') = M[Y^0(s) Y^0(s')] =$$

$$= M\left[\int_a^b g(s, t) X^0(t)\, dt \int_a^b g(s', t') X^0(t')\, dt'\right] =$$

$$= M\left[\int_a^b \int_a^b g(s, t) g(s', t') X^0(t) X^0(t')\, dt\, dt'\right] =$$

$$= \int_a^b \int_a^b g(s, t) g(s', t') M[X^0(t) X^0(t')]\, dt\, dt'$$

o bien

$$K_y(s, s') = \int_a^b \int_a^b g(s, t)\, g(s', t')\, K_x(t, t')\, dt\, dt'. \qquad (4.7.3)$$

De un modo análogo se puede obtener la siguiente fórmula para la función correlativa recíproca $K_{xy}(t, s)$ de la función aleatoria $X(t)$ y la integral (4.7.1) de ella:

$$K_{xy}(t, s) = \int_a^b g(s, t')\, K_x(t, t')\, dt'. \qquad (4.7.4)$$

En la práctica es suficiente a veces hallar la dispersión de la integral de la función aleatoria. Como la dispersión de la función aleatoria es igual al valor de su función correlativa, para iguales valores de los argumentos, suponiendo que en (4.7.3) $s' = s$, obtendremos

$$D_y(s) = K_y(s, s) = \int_a^b \int_a^b g(s, t)\, g(s, t')\, K_x(t, t')\, dt\, dt'. \qquad (4.7.5)$$

De esta fórmula se ve que, para calcular la dispersión de la integral de la función aleatoria, es necesario conocer la función correlativa de la función subintegral.

Vemos que resulta ser suficiente el conocimiento de la esperanza matemática y de la función correlativa para realizar sobre las funciones aleatorias las operaciones elementales del análisis: la derivación e integración de las funciones aleatorias, así como las operaciones lineales del Algebra.

Ejemplo 4.7.1. Hallar la esperanza matemática y la función correlativa de la integral de la función aleatoria

$$Y(s) = \int_0^s X(t)\, dt, \qquad (4.7.6)$$

si

$$\left.\begin{aligned} m_x(t) &= a + bt, \\ K_x(t, t') &= De^{-\alpha|t-t'|} \end{aligned}\right\} \qquad (4.7.7)$$

En este caso la función $g(s, t)$ es igual a la unidad en el intervalo $(0, s)$ y a cero en el intervalo (s, ∞). La fórmula (4.7.2) da

$$m_y(s) = as + \frac{bs^2}{2}. \qquad (4.7.8)$$

La fórmula (4.7.3) para la función correlativa cuando $s < s'$ ofrece

$$K_Y(s, s') = \int_0^s \int_0^{s'} K_X(t, t')\,dt\,dt' = D \int_0^s \int_0^{s'} e^{-\alpha(t-t')}\,dt\,dt' =$$

$$= D \int_0^s dt \left[\int_0^t e^{-\alpha(t-t')}\,dt' + \int_t^{s'} e^{-\alpha(t'-t)}\,dt' \right] =$$

$$= D \int_0^s \left[\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha(s'-t)}-1}{\alpha} \right] dt =$$

$$= \frac{D}{\alpha^2} [2\alpha s - 1 + e^{-\alpha s} + e^{-\alpha s'} - e^{-\alpha(s'-s)}].$$

Para hallar la expresión de la función correlativa cuando $s > s'$, es suficiente, en virtud de la propiedad de la simetría de la función correlativa, permutar los argumentos s y s'. Como resultado, para todos los s y s', la función correlativa de la integral de la función aleatoria $X(t)$ se expresará por la fórmula

$$K_Y(s, s') = \frac{D}{\alpha^2} [2\alpha \text{ mín } (s, s') - 1 + e^{-\alpha s} + e^{-\alpha s'} - e^{-\alpha|s-s'|}], \quad (4.7.9)$$

donde mín (s, s') es el menor de los números s, s'. La dispersión de la integral de la función aleatoria $X(t)$ se determina por la fórmula obtenida cuando $s' = s$:

$$D_Y(s) = \frac{2D}{\alpha^2} (\alpha s - 1 + e^{-\alpha s}). \quad (4.7.10)$$

Ejemplo 4.7.2. Hallar la esperanza matemática y la desviación cuadrática media de la deriva del giroscopio $\Theta(t)$ bajo la influencia del momento aleatorio $M(t)$ durante el tiempo t si la esperanza matemática de este momento es constante e igual a m, mientras que

$$K_m(t, t') = De^{-\alpha|t-t'|}[1 + \alpha|t-t'|]. \quad (4.7.11)$$

Haciendo la suposición, corriente en la teoría aproximada de los giroscopios, de que la dirección del vector del momento cinético del giroscopio coincide con la del eje de su rotor y recordando que, en virtud de una ley conocida de la Mecánica, la velocidad del extremo del vector del momento cinético es igual al momento de las fuerzas que actúan sobre el giroscopio, podemos escribir

$$\Theta(t) = \frac{1}{H} \int_0^t M(\tau)\,d\tau, \quad (4.7.12)$$

donde H es el momento cinético del giroscopio. Comparando esta fórmula con (4.7.1), vemos que la función $g(t, \tau)$ en este caso es igual a $1/H$ cuando $0 \leqslant \tau \leqslant t$ y a cero cuando $\tau > t$. En virtud de las fórmulas (4.7.2) y (4.7.5), la espe-

ranza matemática y la dispersión del ángulo de deriva del giroscopio $\theta(t)$ son:

$$m_\theta(t)=\frac{1}{H}\int_0^t m\,dt=\frac{mt}{H}, \tag{4.7.13}$$

$$D_\theta(t)=\frac{1}{H^2}\int_0^t\int_0^t K_m(\tau,\tau')\,d\tau\,d\tau'=\frac{D}{H^2}\int_0^t\int_0^t e^{-\alpha|\tau-\tau'|}[1+\alpha\,|\tau-\tau'|]\,d\tau\,d\tau'=$$

$$=\frac{D}{H^2}\int_0^t d\tau\left\{\int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-\tau')}[1+\alpha(\tau-\tau')]\,d\tau'+\right.$$

$$\left.+\int_\tau^t e^{-\alpha(\tau'-\tau)}[1+\alpha(\tau'-\tau)]\,d\tau'\right\}=$$

$$=\frac{D}{H^2}\int_0^t[\tau e^{-\alpha\tau}+(t-\tau)\,e^{-\alpha(t-\tau)}]\,d\tau=\frac{2D}{H^2\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t}). \tag{4.7.14}$$

Estas fórmulas muestran que la deriva sistemática del giroscopio bajo la acción de la componente constante del momento crece proporcionalmente al tiempo y la desviación cuadrática media del ángulo de deriva del giroscopio, bajo el efecto de la componente aleatoria del momento, tiende a la magnitud constante $2D/H^2\alpha^2$. Cuando $m = 10^{-6}$ *Ncm*, $D = 2\cdot10^{-4}N^2$ *cm*^{2}, $H = 2$ *Ncm*, $\alpha = 0{,}5$ *s*$^{-1}$, la deriva sistemática del giroscopio constituirá, en virtud de la fórmula (4.7.13), aproximadamente 52′ durante 5 min y el valor límite de la desviación cuadrática media de la deriva del giroscopio, en virtud de la fórmula (4.7.14), es aproximadamente igual a 1°9′.

§.4 8. Secuencias aleatorias. Procesos aleatorios markovianos

Los valores de la función aleatoria en la serie discreta de los puntos fijos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ forman una secuencia aleatoria $X_r = X(t_r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Es evidente que el término arbitrario de la secuencia aleatoria X_r se puede considerar como función aleatoria de su número, es decir, del argumento r representado por un número entero y, de este modo, no examinar el argumento t.

Si el número de valores del argumento t_r es finito, los valores correspondientes de la función aleatoria forman una secuencia aleatoria finita. Los términos de la secuencia aleatoria finita se pueden considerar como componentes de un vector aleatorio. Por consiguiente, para las secuencias aleatorias finitas es válida por completo la teoría de vectores aleatorios expuesta en el capítulo anterior. Si el número de valores del argumento t_r es infinito, los valores correspondientes de la función aleatoria forman una secuencia aleatoria infinita. La secuencia de valores del argumento $\{t_r\}$ puede irse a la infinidad por el eje t a un lado cualquiera (positivo o negativo) o a ambos lados. En el último caso con los valores t_r del argumento

t se confrontan todos los números enteros desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En lo sucesivo examinaremos siempre, para que el examen tenga un carácter general, las secuencias aleatorias infinitas a ambos lados.

A veces en los problemas aplicativos la secuencia aleatoria se llama función aleatoria enrejada y el argumento, representado por números enteros, de tal función aleatoria se toma entre corchetes para diferenciarlo del argumento continuamente variable: $X_r = X[r]$ $(r = 0, \pm 2 \ldots)$.

La característica probabilística completa de una secuencia aleatoria es la secuencia de leyes de distribución de sus términos tomados uno a uno, dos a dos, tres a tres, etc.

La secuencia aleatoria se considera normalmente repartida, si sus leyes de distribución de todos los órdenes son normales.

Limitándose a los momentos de primer y segundo orden, se puede caracterizar la secuencia aleatoria por su esperanza matemática y su función correlativa.

La esperanza matemática de una secuencia aleatoria es, evidentemente, una secuencia de números que representan las esperanzas matemáticas de los términos correspondientes de la secuencia aleatoria:

$$m_r^x = M[X_r] = M[X[t_r]] \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (4.8.1)$$

La función correlativa de una secuencia aleatoria representa el momento de correlación de dos términos de esta secuencia elegidos arbitrariamente, considerado como función de los números de los términos mencionados:

$$k_{rs}^x = M[X_r^0 X_s^0] = M[X^0(t_r) X^0(t_s)] \quad (r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (4.8.2)$$

Ejemplo 4.8.1. Los valores de la función aleatoria $X(t)$ con esperanza matemática y función correlativa

$$m_x = a + bx, \quad K_x(t, t') = De^{-\alpha|t-t'|} \quad (4.8.3)$$

para los valores equidistantes del argumento $t_r = r\Delta$ $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ forman la secuencia aleatoria X_r con la esperanza matemática

$$m_r^x = a + br\Delta \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (4.8.4)$$

y la función correlativa

$$K_{rs}^x = Dq^{|r-s|}, \quad q = e^{-\alpha\Delta}. \quad (4.8.5)$$

El tipo más simple de secuencia aleatoria es la de magnitudes aleatorias independientes. Para tal secuencia aleatoria la función correlativa es igual a la dispersión del término correspondiente de la secuencia, siendo iguales los valores de los argumentos $(r = s)$, y es igual a cero si los argumentos tienen diferentes valores $(r \neq s)$.

En cuanto a la simplicidad, el siguiente tipo de secuencias aleatorias serán tales secuencias en las que la dependencia entre

los términos parece extenderse sólo a un número pequeño de términos vecinos. Tales secuencias aleatorias se llaman cadenas markovianas. Ahora vamos a dar una definición exacta de las cadenas markovianas.

La secuencia aleatoria $\{X_r\}$ se denomina *cadena markoviana simple*, si la ley condicional de distribución de cada término de la secuencia X_r con respecto a los términos anteriores $X_{r-1}, \ldots, X_{r-n}$, para cualquiera $n > 1$, depende solamente del valor que toma el término precedente de la secuencia X_{r-1}. Así pues, la secuencia aleatoria es una cadena markoviana simple, si la densidad condicional de probabilidad de cada uno de sus términos X_r con respecto a los términos anteriores $X_{r-1}, \ldots, X_{r-n}$, para cualquiera $n > 1$, es idénticamente igual a la densidad condicional de probabilidad X_r con respecto a X_{r-1}:

$$f_r(x_r \mid x_{r-1}, \ldots, x_{r-n}) \equiv f_r(x_r \mid x_{r-1}) \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{4.8.6}$$

La secuencia aleatoria $\{X_r\}$ se llama *cadena markoviana compuesta* de orden l, si la ley condicional de distribución de cada término de la secuencia X_r con respecto a los términos precedentes $X_{r-1}, \ldots, X_{r-n}$, para cualquiera $n > l$, depende solamente de los valores que toman l de los términos precedentes $X_{r-1}, \ldots, X_{r-l}$, es decir,

$$f_r(x_r \mid x_{r-1}, \ldots, x_{r-l}, x_{r-l-1}, \ldots, x_{r-n}) \equiv$$
$$\equiv f_r(x_r \mid x_{r-1}, \ldots, x_{r-l}) \quad (n = l+1, l+2, \ldots). \tag{4.8.7}$$

Ejemplo 4.8.2. Examinemos la secuencia de experimentos independientes en condiciones iguales. Sea X_r el número de veces que se produce cierto acontecimiento A al realizar la r-ésima prueba y p, la probabilidad de que se produzca el acontecimiento A en cada prueba. Es evidente que la secuencia $X_1, X_2, \ldots, X_r, \ldots$ es la secuencia de magnitudes aleatorias independientes con la esperanza matemática constante $m_r^x = p$ y la función correlativa $k_{rr}^x = pq$, $k_{rs}^x = 0$ cuando $s \neq r$ (véase el ejemplo 3.9.1).

Ejemplo 4.8.3. La secuencia aleatoria normalmente repartida $\{X_r\}$ con la función correlativa $k_{rs}^x = Dq^{|r-s|}$ representa una cadena markoviana simple. Observemos, para la demostración, que la magnitud aleatoria $V_r = X_r - qX_{r-1}$ no depende de las magnitudes aleatorias $X_{r-1}, X_{r-2}, \ldots$ En efecto, para cualquiera $s < r$

$$M[V_r^0 X_s^0] = M[M_r^0 X_s^0] - qM[X_{r-1}^0 X_s^0] = Dq^{r-s} - qDq^{r-1-s} = 0 \tag{4.8.8}$$

es decir, V_s y X_s no están correlacionadas para cualquiera $s < r$. Pero como la distribución conjunta de las magnitudes $V_r, X_{s_1}, \ldots, X_{s_k}$ es normal, entonces, de lo demostrado en el § 3.11, se deduce que la magnitud V_r no depende del conjunto de magnitudes $X_{s_1}, \ldots, X_{s_k}$ para cualesquiera $s_1, \ldots, s_k < r$. Por

consiguiente, la densidad condicional de probabilidad de la magnitud aleatoria V_r con respecto a las magnitudes $X_{r-1}, \ldots, X_{r-n}$, para cualquier n, coincide con su densidad incondicional de probabilidad:

$$g(v_r \mid x_{r-1}, \ldots, X_{r-n}) = g(v_r). \tag{4.8.9}$$

Para hallar la densidad condicional de probabilidad de la magnitud aleatoria X_r con respecto a $X_{r-1}, \ldots, X_{r-n}$, observemos que, al ser fijo el valor x_{r-1} de la magnitud X_{r-1}, la magnitud aleatoria X_r representa la función lineal de la magnitud aleatoria V_r:

$$X_r = V_r + gx_{r-1}. \tag{4.8.10}$$

Por lo tanto, para hallar la densidad condicional de probabilidad buscada de la magnitud X_r, se puede aplicar la fórmula (3.3.12) deducida en el ejemplo 3.3.1. Entonces, teniendo en cuenta que en el caso dado $y = x_r$, $x = v_r$, $a = 1$, $b = qx_{r-1}$, obtendremos

$$f(x_r \mid x_{r-1}, \ldots, x_{r-n}) = g(x_r - qx_{r-1}). \tag{4.8.11}$$

De aquí resulta directamente que la densidad condicional de probabilidad de la magnitud X_r con respecto a $X_{r-1}, \ldots, X_{r-n}$ depende solamente del valor x_{r-1} de la magnitud X_{r-1} y no depende de los valores de las magnitudes $X_{r-2}, \ldots, X_{r-n}$ cualquiera que sea n. Esto es lo que demuestra que la secuencia aleatoria considerada representa una cadena markoviana simple.

Le dejamos al lector que por sí mismo termine el ejemplo y obtenga la expresión definitiva de la densidad condicional de probabilidad normal de la magnitud aleatoria X_r con respecto a X_{r-1}.

La cadena markoviana simple se llama frecuentemente *proceso aleatorio markoviano con tiempo discreto*. Tal proceso aleatorio se caracteriza completamente por la densidad bidimensional de probabilidad, es decir, por la densidad conjunta de probabilidad de dos cualesquiera de sus términos. En efecto, conociendo la densidad bidimensional de probabilidad de un proceso aleatorio, se puede hallar, por la fórmula (4.1.1), su densidad unidimensional de probabilidad y la densidad condicional de probabilidad $f(x_r \mid x_{r-1})$ de cualquier término de la secuencia con respecto al precedente, llamada *densidad de probabilidad del paso* del proceso aleatorio markoviano:

$$f(x_r \mid x_{r-1}) = \frac{f_2(x_{r-1}, x_r)}{f_1(x_{r-1})} = \frac{f_2(x_{r-1}, x_r)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x_{r-1}, x_r)\, dx_r}. \tag{4.8.12}$$

Luego, la densidad conjunta de probabilidad de cualquier número de términos de la secuencia se determina por la fórmula

$$f_{n+1}(x_{r-n}, \ldots, x_{r-1}, x_r) = f_1(x_{r-n}) f(x_{r-n+1} \mid x_{r-n}) \ldots \\ \ldots f(x_r \mid x_{r-1}). \tag{4.8.13}$$

La noción de proceso aleatorio markoviano se puede extender también a las funciones aleatorias de un argumento escalar continuamente variable. Precisamente la función aleatoria de argumento escalar $X(t)$ es la que se denomina *proceso aleatorio markoviano*

siempre que sus valores, cualesquiera que sean los valores $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ del argumento t, formen una cadena markoviana simple.

Ejemplo 4.8.4. La función aleatoria normalmente repartida con la función correlativa $K_x(t, t') = De^{-\alpha|t-t'|}$ representa un proceso aleatorio markoviano. Hemos demostrado anteriormente, en el ejemplo 4.8.3, que los valores de esta función aleatoria, para cualesquiera valores equidistantes del argumento, forman una cadena markoviana simple. De un modo absolutamente análogo se demuestra que, cualesquiera que sean los valores, arbitrariamente elegidos, del argumento $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, los valores correspondientes de la función aleatoria $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ forman una cadena markoviana simple.

CAPITULO 5

Funciones aleatorias estacionarias

§ 5.1. Definición y propiedades principales de las funciones aleatorias estacionarias

Generalmente se llaman estacionarios a tales procesos y objetos cuyas características determinadas no dependen del tiempo de observación, es decir, no cambian al decalar arbitrariamente el tiempo (son invariantes con respecto a cualesquiera decalajes del tiempo). De acuerdo con lo dicho, se denomina *estacionaria* a una función aleatoria $X(t)$ si las determinadas características probabilísticas de la función aleatoria $X(t+\Delta)$, cualquiera que sea Δ, coinciden idénticamente con las características correspondientes de la $X(t)$.

Es evidente que la esperanza matemática y la dispersión de la función aleatoria estacionaria son constantes y su función correlativa depende solamente de la diferencia de los argmuntos $t - t'$. En efecto, según la definición general de la estacionaridad, la esperanza matemática y la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ satisfacen las condiciones

$$m_x(t) \equiv m_x(t+\Delta), \tag{5.1.1}$$

$$K_x(t, t') \equiv K_x(t+\Delta, t'+\Delta) \tag{5.1.2}$$

cualquiera que sea Δ. Poniendo en (5.1.1) $\Delta = -t$, obtendremos

$$m_x(t) \equiv m_x(0) = \text{const}. \tag{5.1.3}$$

Poniendo en (5.1.2) $\Delta = -t'$, obtendremos

$$K_x(t, t') \equiv K_x(t-t', 0). \tag{5.1.4}$$

La dispersión de la función aleatoria $X(t)$ es igual al valor de su función correlativa cuando $t' = t$. Por eso, de (5.1.4) se deduce que

$$D_x(t) \equiv K_x(t, t) \equiv K_x(0, 0) = D_x(0) = \text{const}. \tag{5.1.5}$$

Designando la función de una variable $t - t'$ en el segundo miembro de la igualdad (5.1.4) por $k_x(t-t')$, podemos escribir

$$K_x(t, t') = k_x(t-t') = k_x(\tau), \quad \tau = t - t'. \tag{5.1.6}$$

Ahora bien, si la función aleatoria $X(t)$ es estacionaria, entonces, dondequiera que elijamos un intervalo τ de longitud dada en el eje de la variable independiente t, los valores de la función aleato-

ria $X(t)$ tienen en los extremos de este intervalo un mismo momento de correlación $k_x(\tau)$.

Para todos los problemas prácticos en los que se trata sólo con momentos de los dos primeros órdenes (esperanzas matemáticas y funciones correlativas), basta la constancia de la esperanza matemática y la dependencia de la función de correlación sólo de la diferencia de los argumentos para considerar estacionaria a una función aleatoria. Por eso, las funciones aleatorias cuyas esperanzas matemáticas son constantes y las funciones correlativas dependen sólo de la diferencia de los argumentos se llaman *estacionarias en el sentido amplio*. En aquellos casos en que se trata de otras características de la función aleatoria, la estacionaridad en el amplio sentido no es suficiente. Es necesario exigir que todas las características de la función aleatoria que nos interesan sean invariantes con respecto a los decalajes arbitrarios a lo largo del eje de la variable independiente para que se pueda considerar estacionaria dicha magnitud. Así pues, en los problemas prácticos tenemos que encontrarnos con diferente «grado de estacionaridad» de las funciones aleatorias en dependencia de cuáles son las características probabilísticas que nos interesan. Las funciones aleatorias pueden ser estacionarias «en mayor o menor grado». *La estacionaridad en el sentido amplio* representa el tipo más simple de estacionaridad. La exigencia de estacionaridad en el sentido amplio impone a una función aleatoria las mínimas limitaciones. Otro caso extremo representa la estacionaridad completa o *la estacionaridad en el sentido estricto* cuando todas las características probabilísticas de la función aleatoria, sin exclusión ninguna, son invariantes con respecto a los decalajes arbitrarios por el eje de la variable independiente. La función aleatoria $X(t)$ se denomina *estacionaria en el sentido estricto*, si todas las leyes de distribución de todos los órdenes posibles de la función aleatoria $X(t + \Delta)$, cualquiera que sea Δ, coinciden idénticamente con las correspondientes leyes de distribución de la función aleatoria $X(t)$.

A continuación, al hablar de las funciones aleatorias estacionarias, siempre tendremos en cuenta sólo las funciones aleatorias estacionarias en el sentido amplio. Por eso, para abreviar, llamaremos estacionarias a tales funciones aleatorias sin señalar que la estacionaridad se entiende siempre en el sentido amplio.

Según la definición dada, la función aleatoria con esperanza matemática variable es no estacionaria incluso si la función correlativa de la misma depende sólo de la diferencia de los argumentos. Sin embargo, tal no estacionaridad es, evidentemente, no esencial, puesto que la función aleatoria centrada $X^0(t) = X(t) - m_x(t)$ es estacionaria siempre que la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ dependa sólo de la diferencia de los argumentos.

Como la función correlativa de cualquier función aleatoria es simétrica, es decir, no cambia de valor al permutar los valores de los argumentos, entonces la función correlativa de una función aleatoria estacionaria satisface la condición

$$k_x(t' - t) = k_x(t - t')$$

o bien

$$k_x(-\tau) = k_x(\tau). \tag{5.1.7}$$

Así pues, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria es función par de la diferencia de los argumentos.

La desigualdad (4.3.2) a que satisface la función correlativa de cualquier función aleatoria toma, en caso de una función aleatoria estacionaria $X(t)$, la forma

$$|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0) = D_x. \tag{5.1.8}$$

Así pues, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria, cualquiera que sea τ, no puede ser, en magnitud absoluta, mayor que su valor correspondiente al origen de coordenadas.

Ejemplo 5.1.1. En los ejemplos 4.2.3, 4.2.6 y 4.2.7 dados en el capítulo anterior nos encontramos con la función correlativa, dependiente sólo de la diferencia de los argumentos, de la forma

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad \tau = t - t'.$$

La función aleatoria que tiene la esperanza matemática constante y tal función correlativa es estacionaria (en el sentido amplio).

Ejemplo 5.1.2. La función aleatoria examinada en el ejemplo 4.2.1 es estacionaria solamente en el caso cuando las dispersiones de las magnitudes aleatorias U y Z son iguales. En el caso general de diferentes dispersiones de las magnitudes aleatorias U y Z esta función aleatoria no es estacionaria. Ahora bien, la oscilación armónica de cierta frecuencia, con amplitud y fase aleatorias, representa en el caso general una función aleatoria no estacionaria y sólo en el caso particular de ser iguales las dispersiones de los coeficientes aleatorios adjuntos al seno y el coseno, es una función aleatoria estacionaria.

Ejemplo 5.1.3. La función aleatoria representada en el ejemplo 4.2.3 es estacionaria cualquiera que sea la densidad de probabilidad de la frecuencia aleatoria de oscilaciones $f(\omega)$ puesto que su esperanza matemática es idénticamente igual a cero, mientras que la función correlativa, determinada por la fórmula (4.2.21), depende sólo de la diferencia de los argumentos.

Ejemplo 5.1.4. Si

$$m_x(t) = a + bt, \quad K_x(t, t') = De^{-\alpha|t-t'|},$$

entonces la función aleatoria $X(t)$ es no estacionaria. No obstante, esta no estacionaridad no es esencial, puesto que la correspondiente función aleatoria centrada $X^0(t)$ es estacionaria.

En las aplicaciones tenemos que encontrarnos frecuentemente con la función correlativa exponencial

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}. \tag{5.1.9}$$

Otro tipo bastante frecuente de función correlativa de un proceso aleatorio estacionario es la función de la forma

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \qquad (5.1.10)$$

o una función más general de la forma

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \operatorname{sen} \omega_0 |\tau|). \qquad (5.1.11)$$

En la fig. 5.1.1 se muestra el gráfico de una función correlativa exponencial (5.1.9). En la fig. 5.1.2 se representa el gráfico de la función correlativa exponencial de coseno (5.1.10). Vemos que

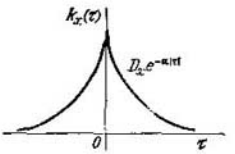


Fig. 5.1.1.

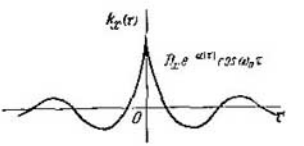


Fig. 5.1.2.

ambas funciones tienen en el origen de coordenadas un punto angular en el que la derivada de la función correlativa tiene discontinuidad de primer género. Para la aproximación de las funciones correlativas con la derivada continua, se puede aplicar la expresión (5.1.11), eligiendo en ésta el coeficiente γ de modo que la derivada de dicha función correlativa sea igual a cero cuando $\tau = 0$ (el lector puede por sí mismo comprobar que esto se alcanza cuando $\gamma = \alpha/\omega_0$). En la fig. 5.1.3 se muestra el gráfico de tal función correlativa. Observemos que la función que tiene la forma de (5.1.11) puede ser correlativa sólo en aquel caso cuando $|\gamma| \leqslant \alpha/\omega_0$ puesto que para $|\gamma| > \alpha/\omega_0$ la condición (5.1.8) no se satisface.

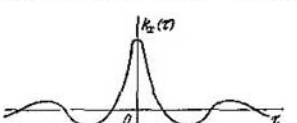


Fig. 5.1.3.

A continuación veremos que cualquier función correlativa de la función aleatoria estacionaria puede ser aproximada, con un grado cualquiera de precisión, por la combinación lineal de las funciones de la forma (5.1.9), (5.1.10) y (5.1.11).

Las fórmulas generales dadas en el § 4.6 para las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas de las derivadas de una función aleatoria son aplicables también para las funciones aleatorias estacionarias. Valiéndonos de las fórmulas (4.6.2) y (4.6.3), hallamos la esperanza matemática y la función correlativa de la primera deri-

vada $Y_1(t) = X'(t)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$:

$$m_{y_1}(t) = 0, \quad K_{y_1}(t, t') \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t\, \partial t'} = -k_x''(\tau).$$

De aquí se ve que la derivada de una función aleatoria estacionaria también es estacionaria. De un modo análogo hallamos por las fórmulas (4.6.6) y (4.6.7) la esperanza matemática y la función correlativa de la derivada del orden p de la función aleatoria estacionaria $X(t)$:

$$m_{y_p} = 0, \quad K_{y_p}(t, t') = \frac{\partial^{2p} K_x(t, t')}{\partial t^p\, \partial t'^p} = (-1)^p\, k_x^{(2p)}(\tau).$$

Ahora bien, todas las derivadas de una función aleatoria estacionaria son funciones aleatorias estacionarias con esperanzas matemáticas iguales a cero; en este caso, las funciones correlativas de las derivadas se determinan por la fórmula

$$k_{y_p}(\tau) = (-1)^p\, k_x^{(2p)}(\tau) \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{5.1.12}$$

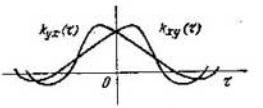


Fig. 5.1.4.

Dos funciones aleatorias del mismo argumento $X(t)$, $Y(t)$ se llaman *estacionariamente ligadas*, si su función correlativa recíproca es función de la diferencia de los argumentos:

$$K_{xy}(t, t') = k_{xy}(\tau) \quad \tau = t - t'. \tag{5.1.13}$$

De la propiedad (4.4.3) de una función correlativa recíproca se deduce que dos funciones correlativas recíprocas de dos funciones aleatorias estacionariamente ligadas $X(t)$ y $Y(t)$, tomadas en diferentes órdenes, están enlazadas por la correlación

$$k_{xy}(\tau) = k_{yx}(-\tau). \tag{5.1.14}$$

Gráficamente esto significa que la curva $k_{yx}(\tau)$ es la reflexión especular de la curva $k_{xy}(\tau)$ con respecto al eje de ordenadas (fig. 5.1.4).

La desigualdad (4.4.5) para las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$ estacionarias y estacionariamente ligadas toma la forma

$$|k_{xy}(\tau)| \leqslant \sqrt{k_x(0)\, k_y(0)} = \sqrt{D_x D_y}. \tag{5.1.15}$$

Las fórmulas (4.2.10) y (4.4.6) que determinan las funciones correlativas normadas toman, para las funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas, respectivamente la forma

$$r_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{k_x(0)}, \tag{5.1.16}$$

$$r_{xy}(\tau) = \frac{k_{xy}(\tau)}{\sqrt{k_x(0)\, k_y(0)}}. \tag{5.1.17}$$

Ejemplo 5.1.5. Examinemos las funciones aleatorias

$$X(t) = Z \cos \omega_0 t + U \operatorname{sen} \omega_0 t.$$
$$Y(t) = -Z \operatorname{sen} \omega_0 t + U \cos \omega_0 t,$$

donde Z y U son magnitudes aleatorias no correlacionadas con esperanzas matemáticas iguales a cero y dispersiones iguales a D. Es evidente que las funciones correlativas de estas funciones aleatorias se expresan por la fórmula

$$k_x(\tau) = k_y(\tau) = D \cos \omega_0 \tau,$$

que se deduce lo mismo que en el ejemplo 4.2.1. La función correlativa recíproca de las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$, en virtud de (3.9.8), se determina por la fórmula

$$K_{xy}(t, t') = -D \cos \omega_0 t \operatorname{sen} \omega_0 t' + D \operatorname{sen} \omega_0 t \cos \omega_0 t' = D \operatorname{sen} \omega_0 (t - t').$$

Así pues, las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$ son estacionariamente ligadas.

Ejemplo 5.1.6. Examinemos ahora las funciones aleatorias

$$X(t) = Z \cos \omega_0 t + U \operatorname{sen} \omega_0 t, \quad Y(t) = Z \cos \omega_0 t + V \operatorname{sen} \omega_0 t$$

donde Z, U, V son magnitudes aleatorias no correlacionadas con esperanzas matemáticas iguales a cero y las mismas dispersiones iguales a D. En virtud de los resultados del ejemplo 4.2.1, ambas funciones aleatorias son estacionarias puesto que

$$K_x(t, t') = K_y(t, t') = D \cos \omega_0 (t - t').$$

Sin embargo, éstas no son ligadas estacionariamente debido a que su función correlativa recíproca

$$K_{xy}(t, t') = M[X(t)\, Y(t')] = D \cos \omega t \cos \omega t'$$

no es función de la diferencia $t - t'$.

Aplicando la fórmula (4.6.8), se puede determinar las funciones correlativas recíprocas de las derivadas de diferentes órdenes de una función aleatoria estacionaria $X(t)$:

$$K_{y_p y_q}(t, t') = \frac{\partial^{p+q} K_x(t, t')}{\partial t^p \partial t'^q} = (-1)^q k_x^{(p+q)}(\tau).$$

Así pues, las derivadas de una función aleatoria estacionaria son funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas y sus funciones correlativas recíprocas se determinan por la fórmula

$$K_{y_p y_q}(\tau) = (-1)^q k_x^{(p+q)}(\tau) \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots). \quad (5.1.18)$$

En particular, la función correlativa recíproca de una función aleatoria estacionaria $X(t)$ y de su primera derivada se determina por la fórmula

$$k_{xy_1}(\tau) = -k_x'(\tau). \quad (5.1.19)$$

Si la función correlativa $k_x(\tau)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ tiene continua la primera derivada, entonces $k_x'(0) = 0$ ya que, según (5.1.8), $k_x(\tau)$ tiene el máximo cuando $\tau = 0$. Si la primera derivada de la función correlativa es discontinua en el punto $\tau = 0$ como, por ejemplo, en los casos (5.1.9) y (5.1.10), entonces, debido a la paridad de la función correlativa (5.1.7), su derivada

izquierda en el punto $\tau = 0$ es igual en valor absoluto y contraria en signo a la derivada derecha. Como resultado, en este caso también se puede considerar que $k'_x(0) = 0$. De este modo, para cualquier función aleatoria estacionaria

$$k_{xy_1}(0) = -k'_x(0) = 0. \tag{5.1.20}$$

Esto quiere decir que cualquier función aleatoria estacionaria y el valor de su primera derivada en el mismo punto no están correlacionados.

Si la función aleatoria estacionaria está repartida normalmente, su valor, cualquiera que sea el valor del argumento, y el de su primera derivada, para el mismo valor del argumento, son independientes. Claro está, que de lo dicho no se puede deducir de ningún modo que la función aleatoria estacionaria y su primera derivada están, en general, no correlacionadas. Como la derivada de la función correlativa siempre es distinta del cero idéntico, la magnitud aleatoria estacionaria y su primera derivada siempre están correlacionadas *.

§ 5.2. Estructura de una función aleatoria estacionaria

Examinemos todas las funciones aleatorias que se pueden componer de las sinusoides de diferentes frecuencias con amplitudes y fases aleatorias. Tales funciones aleatorias se expresan por la fórmula

$$X(t) = m_x + \sum_{\nu=1}^{n} (U_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t + Z_\nu \cos \omega_\nu t), \tag{5.2.1}$$

donde $\omega_1, \ldots, \omega_n$ son las frecuencias elegidas arbitrariamente, m_x es la esperanza matemática constante y $U_1, \ldots, U_n, Z_1, \ldots, Z_n$ son las magnitudes aleatorias cuyas esperanzas matemáticas son iguales a cero. Vamos a limitarnos al caso en que las magnitudes aleatorias $U_1, \ldots, U_n, Z_1, \ldots, Z_n$ no están correlacionadas y tienen por parejas dispersiones iguales $D[U_\nu] = D[Z_\nu] = D_\nu$. En este caso tienen lugar las igualdades

$$\left.\begin{aligned} &M[U_\nu] = M[Z_\nu] = 0, \quad D[U_\nu] = D[Z_\nu] = D_\nu, \\ &M[U_\nu U_\mu] = M[Z_\nu Z_\mu] = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu, \\ &M[U_\nu Z_\mu] = 0 \text{ para cualesquiera } \nu, \ \mu. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.2}$$

La función aleatoria $X^0(t) = X(t) - m_x$ determinada por la fórmula (5.2.1) representa en este caso la suma de las funciones

*) Como excepción se puede citar solamente un caso absolutamente no interesante para los fines prácticos referente a la magnitud aleatoria estacionaria todas las realizaciones de la cual son constantes. Tal función aleatoria representa una magnitud aleatoria corriente y de hecho no es una función aleatoria.

aleatorias no correlacionadas de la forma

$$X_\nu(t) = U_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t + Z_\nu \cos \omega_\nu t \ (\nu = 1, 2, \ldots, n). \quad (5.2.3)$$

Por consiguiente, conforme a los resultados obtenidos en el § 4.5, la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ es igual a la suma de las funciones aleatorias correlativas $X_\nu(t)$. Para calcular la función correlativa de la función aleatoria $X_\nu(t)$, sustituyamos en (5.2.3) t por t':

$$X_\nu(t') = U_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t' + Z_\nu \cos \omega_\nu t'. \quad (5.2.4)$$

Entonces, la función correlativa de la función aleatoria $X_\nu(t)$ representará el momento de correlación de dos funciones lineales (5.2.3) y (5.2.4) de las magnitudes aleatorias no correlacionadas U_ν y Z_ν para cuyo cálculo se puede aplicar la fórmula (3.9.8). Como resultado obtendremos

$$K_{x_\nu}(t, t') = D_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t \operatorname{sen} \omega_\nu t' + D_\nu \cos \omega_\nu t \cos \omega_\nu t' =$$
$$= D_\nu \cos \omega_\nu (t - t'). \quad (5.2.5)$$

Esta fórmula muestra que todas las funciones aleatorias $X_\nu(t)$ son estacionarias. Sumando las expresiones (5.2.5) correspondientes a todos los valores ν de 1 hasta n, hallaremos la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ que también dependerá solamente de la diferencia de los argumentos $\tau = t - t'$. Por lo tanto, la función aleatoria $X(t)$ determinada por la fórmula (5.2.1) es estacionaria y su función correlativa se expresa por la fórmula

$$k_x(\tau) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu \cos \omega_\nu \tau. \quad (5.2.6)$$

Este resultado es válido para cualquiera n incluso para $n = \infty$. Así pues, todas las funciones aleatorias que se pueden componer de las sinusoides no correlacionadas de diferentes frecuencias, con magnitudes y fases aleatorias, son funciones aleatorias estacionarias siempre que se cumplan las condiciones (5.2.2) *). El conjunto de frecuencias $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ representa el espectro de frecuencias de la función aleatoria examinada.

Hasta ahora no hemos impuesto ningunas restricciones referentes a la frecuencia ω_ν en la expresión (5.2.1). Estas últimas podrían ser completamente arbitrarias. Ahora examinemos un caso particular concerniente al conjunto infinito de frecuencias equidistantes

$$\omega_\nu = \frac{\pi\nu}{T} \ (\nu = 1, 2, \ldots), \ \Delta\omega = \omega_{\nu+1} - \omega_\nu = \frac{\pi}{T}, \quad (5.2.7)$$

*) Dejamos al lector que por sí mismo se cerciore de que si las condiciones (5.2.2) no se cumplen, la función aleatoria $X(t)$ determinada por la fórmula (5.2.1) no puede ser estacionaria.

donde T es un número positivo arbitrario. En este caso la función correlativa, determinada por la fórmula (5.2.6), será una función periódica con período $2T$ y la fórmula (5.2.6) determinará su descomposición en la serie de Fourier. Los coeficientes de esta serie se determinan por la fórmula conocida en la teoría de series de Fourier

$$D_\nu = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} k_x(\tau) \cos \omega_\nu \tau \, d\tau \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Pero sabemos que la función correlativa de una función aleatoria estacionaria es una función par. Por consiguiente, en la fórmula obtenida la función subintegral es par y la fórmula puede ser escrita en la forma

$$D_\nu = \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_\nu \tau \, d\tau \quad (\nu = 1, 2 \ldots). \tag{5.2.8}$$

De la fórmula (5.2.6) se deriva que para $n = \infty$ la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ se determina por la fórmula

$$D_x = k_x(0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu. \tag{5.2.9}$$

De aquí se deduce que si deseamos obtener una función aleatoria estacionaria con dispersión finita, debemos escoger tales magnitudes aleatorias U_ν y Z_ν que la serie (5.2.9) compuesta de las dispersiones sea convergente.

Todo lo expuesto es aplicable a cualquier intervalo $\Delta\omega$ entre las frecuencias vecinas en la fórmula (5.2.1) o, lo que es lo mismo, a cualquier valor de T en la fórmula (5.2.7). Por eso todos los resultados obtenidos pueden hacerse extensivos también a las sumas de sumandos infinitesimales. Para pasar a este caso, ponemos que *)

$$U_\nu = U_T(\omega_\nu) \Delta\omega, \quad Z_\nu = Z_T(\omega_\nu) \Delta\omega \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{5.2.10}$$

Entonces la fórmula (5.2.1), para $n = \infty$, tomará la forma

$$X(t) = m_x + \sum_{\nu=1}^{\infty} [U_T(\omega_\nu) \operatorname{sen} \omega_\nu t + Z_T(\omega_\nu) \cos \omega_\nu t] \Delta\omega. \tag{5.2.11}$$

Luego ponemos $D_\nu = s_x^T(\omega_\nu) \Delta\omega$, donde

$$S_x^T(\omega_\nu) = \frac{D_\nu}{\Delta\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_\nu \tau \, d\tau \quad (\nu = 1, 2 \ldots) \tag{5.2.12}$$

*) Al disminuir $\Delta\omega$, el número de sumandos en (5.2.1) en cualquier intervalo dado de frecuencias (ω', ω'') crece inversamente proporcional a $\Delta\omega$. Para que en este caso la componente de la función aleatoria, que cae en este intervalo de frecuencias, no aumente infinitamente, es necesario que cada sumando en (5.2.1) sea una magnitud infinitamente pequeña de orden $\Delta\omega$. Por eso conviene separar el multiplicador $\Delta\omega$ de U_ν y Z_ν en forma explícita.

Entonces la fórmula (5.2.6) tomará la forma

$$k_x(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s_x^T(\omega_\nu) \cos \omega_\nu \tau \, \Delta\omega. \tag{5.2.13}$$

La fórmula (5.2.9) para la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ tomará la forma

$$D_x = k_x(0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s_x^T(\omega_\nu) \, \Delta\omega. \tag{5.2.14}$$

En las fórmulas (5.2.11), (5.2.13) y (5.2.14) se muestra con evidencia que si queremos obtener una función aleatoria estacionaria con dispersión finita, entonces, aumentando el número de sumandos en la fórmula (5.2.11), debemos disminuir proporcionalmente estos sumandos. Con otras palabras, aumentando el número de frecuencias en el intervalo dado, debemos disminuir proporcionalmente las dispersiones de las sinusoides separadas para que la suma de las dispersiones de todas las sinusoides en el intervalo dado de frecuencias quede finita.

Las magnitudes $U_T(\omega_\nu)$ y $Z_T(\omega_\nu)$ en la fórmula (5.2.11) se pueden considerar como los valores de las funciones aleatorias del argumento discreto que toma solamente los valores $\omega_1, \omega_2, \ldots$ Análogamente la magnitud $s_x^T(\omega_\nu)$, que se determina por la fórmula (5.2.12), se puede considerar como función del argumento discreto que toma los valores $\omega_1, \omega_2, \ldots$ En virtud de las fórmulas (5.2.10) y (5.2.2), las funciones aleatorias $U_T(\omega_\nu)$ y $Z_T(\omega_\nu)$ no están correlacionadas y, además, los valores de cada una de ellas, al tomar el argumento diferentes valores, no están correlacionados:

$$\left.\begin{aligned} &M[U_T(\omega_\nu) Z_T(\omega_\mu)] = 0 \quad \text{para todos los valores de } \omega_\nu, \omega_\mu, \\ &M[U_T(\omega_\nu) U_T(\omega_\mu)] = M[Z_T(\omega_\nu) Z_T(\omega_\mu)] = 0 \quad \text{para } \omega_\mu \neq \omega_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.15}$$

Para hallar las dispersiones de las funciones aleatorias $U_T(\omega_\nu)$ y $Z_T(\omega_\nu)$, observemos que en virtud de las fórmulas (5.2.10) y (5.2.6) las fórmulas (5.2.2) para las dispersiones de las magnitudes aleatorias U_ν y Z_ν se pueden escribir en la forma

$$D[U_T(\omega_\nu) \Delta\omega] = D[Z_T(\omega_\nu) \Delta\omega] = s_x^T(\omega_\nu) \Delta\omega \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{5.2.16}$$

Pero en virtud de la fórmula (3.9.1)

$$D[U_T(\omega_\nu) \Delta\omega] = D[U_T(\omega_\nu)] \, (\Delta\omega)^2,$$

$$D[Z_T(\omega_\nu) \Delta\omega] = D[Z_T(\omega_\nu)] \, (\Delta\omega)^2.$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.2.16) y efectuando las reducciones, obtendremos

$$D[U_T(\omega_\nu)] = D[Z_T(\omega_\nu)] = \frac{s_x^T(\omega_\nu)}{\Delta\omega} \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \quad (5.2.17)$$

Para el ulterior estudio de las propiedades de las funciones aleatorias $U_T(\omega_\nu)$ y $Z_T(\omega_\nu)$ observemos que en virtud de (5.2.15) y (5.2.17)

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} M[U_T(\omega_\nu) U_T(\omega_\mu)] \Delta\omega = M[U_T^2(\omega_\nu)] \Delta\omega =$$

$$= D[U_T(\omega_\nu)] \Delta\omega = s_x^T(\omega_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \quad (5.2.18)$$

Pero

$$M[U_T(\omega_\nu) U_T(\omega_\mu)] = K_{U_T}(\omega_\nu, \omega_\mu) \quad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots) \quad (5.2.19)$$

representa la función correlativa de la función aleatoria $U_T(\omega_\nu)$. Por lo tanto, la fórmula (5.2.18) se puede escribir en la forma

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} K_{U_T}(\omega_\nu, \omega_\mu) \Delta\omega = s_x^T(\omega_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \quad (5.2.20)$$

La misma fórmula tiene lugar para la función correlativa de la función aleatoria $Z_T(\omega_\nu)$.

Ahora tenemos todo lo necesario para pasar a examinar el caso referente a la suma de sinusoides con amplitudes aleatorias infinitesimales de todas las frecuencias posibles repartidas continuamente en la parte positiva del eje numérico. Sustituyamos en la fórmula (5.2.11) las magnitudes aleatorias $U_\nu = U_T(\omega_\nu) \Delta\omega$, $Z_\nu = Z_T(\omega_\nu) \Delta\omega$ por las magnitudes aleatorias infinitesimales $U(\omega)\, d\omega$, $Z(\omega)\, d\omega$. Sustituyamos correspondientemente la suma por la integral. De este modo determinaremos la función aleatoria estacionaria de la forma

$$X(t) = m_x + \int_0^{\infty} [U(\omega) \operatorname{sen} \omega t + Z(\omega) \cos \omega t]\, d\omega. \quad (5.2.21)$$

En virtud de la última fórmula (5.2.7) la sustitución de la magnitud $\Delta\omega$ por la infinitesimal $d\omega$ corresponde al paso a la magnitud infinitamente grande T. Por eso la función $s_x^T(\omega)$ determinada por la fórmula (5.2.12) se sustituirá por la función

$$S_{1x}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau. \quad (5.2.22)$$

Con ello, las dispersiones de las magnitudes aleatorias infinitesimales $U(\omega)\, d\omega$ y $Z(\omega)\, d\omega$, en virtud de la fórmula (5.2.17), serán iguales a $s_{1x}(\omega)\, d\omega$.

Sustituyendo en la fórmula (5.2.13) las dispersiones $s_x^T(\omega_\nu)\,\Delta\omega$ de las magnitudes aleatorias $U_T(\omega_\nu)\,\Delta\omega$, $Z_T(\omega_\nu)\,\Delta\omega$ por las dispersiones infinitesimales $s_{1x}(\omega)\,d\omega$ de las magnitudes aleatorias $U(\omega)\,d\omega$, $Z(\omega)\,d\omega$, obtendremos la fórmula siguiente para la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ que se determina por la fórmula (5.2.21):

$$k_x(\tau) = \int_0^\infty s_{1x}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega. \tag{5.2.23}$$

La sustitución análoga en la fórmula (5.2.14) da la siguiente expresión de la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$D_x = k_x(0) = \int_0^\infty s_{1x}(\omega)\,d\omega. \tag{5.2.24}$$

Esta fórmula se obtiene también de (5.2.23) cuando $\tau = 0$.

Si en vez de todas las frecuencias posibles tomamos solamente todas las frecuencias del intervalo dado (ω_1, ω_2), obtendremos la función aleatoria estacionaria

$$X_{\omega_1,\,\omega_2}(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} [U(\omega)\operatorname{sen}\omega t + Z(\omega)\cos\omega t]\,d\omega, \tag{5.2.25}$$

cuya dispersión se determinará por la fórmula

$$D[X_{\omega_1,\,\omega_2}(t)] = \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_{1x}(\omega)\,d\omega. \tag{5.2.26}$$

Si en la fórmula (5.2.21) se divide todo el intervalo de frecuencias $(0, \infty)$ en subintervalos, la función aleatoria $X(t)$ se expresará como la suma de funciones aleatorias no correlacionadas de la forma (5.2.25). Como era de esperar, la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ se expresará como la suma de dispersiones de los sumandos iguales a las integrales de la forma (5.2.26) extendidas a los subintervalos correspondientes de frecuencias.

De la fórmula (5.2.24) y de las observaciones anteriores se deduce que la función $s_{1x}(\omega)$ caracteriza la distribución de la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ por las frecuencias. En virtud de la fórmula (5.2.16) la magnitud $D_\nu = s_x^T(\omega_\nu)\,\Delta\omega$ representa la dispersión de un armónico de la frecuencia ω_ν que forma parte de la función aleatoria examinada de la forma (5.2.11). Por eso la magnitud $s_{1x}(\omega)\,d\omega$ es la dispersión infinitesimal de un armónico de la frecuencia dada ω que forma parte de la función aleatoria (5.2.21). Si separamos ahora de la función aleatoria $X(t)$ el sumando correspondiente a un inter-

valo pequeño de frecuencias $(\omega, \omega + \Delta\omega)$, la dispersión de este sumando se determinará por la fórmula (5.2.26) cuando $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$:

$$D[X_{\omega,\ \omega+\Delta\omega}(t)] = \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} s_{1x}(\omega)\, d\omega.$$

Suponiendo que la función $s_{1x}(\omega)$ es continua en el punto ω y aplicando el teorema del valor medio, obtendremos

$$D[X_{\omega,\ \omega+\Delta\omega}(t)] = s_{1x}(\omega')\,\Delta\omega,$$

donde ω' es cierto valor de la frecuencia comprendido entre ω y $\omega + \Delta\omega$. Por consiguiente, al pasar al límite para $\Delta\omega \to 0$ la magnitud ω' tiende a ω y obtendremos que

$$s_{1x}(\omega) = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{D[X_{\omega,\ \omega+\Delta\omega}(t)]}{\Delta\omega}.$$

De aquí está claro que la función $s_{1x}(\omega)$ caracteriza la densidad con que las dispersiones de armónicos separados de la función aleatoria (5.2.21) van repartidas por el espectro de frecuencias.

En virtud de las propiedades estudiadas de la función $s_{1x}(\omega)$ esta función se llama *densidad espectral* de la función aleatoria estacionaria $X(t)$. La integral de la densidad espectral

$$S_{1x}(\omega) = \int_{0}^{\omega} s_{1x}(\mu)\, d\mu \qquad (5.2.27)$$

se denomina *función espectral* de la función aleatoria estacionaria $X(t)$. Es evidente que la densidad espectral es la derivada de la función espectral

$$s_{1x}(\omega) = S'_{1x}(\omega). \qquad (5.2.28)$$

Sustituyendo en la fórmula (5.2.27) la expresión (5.2.22) de la densidad espectral, cambiando el orden de integración y cumpliendo la integración con respecto a μ, obtendremos la siguiente expresión de la función espectral de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ a través de su función correlativa:

$$S_{1x}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} k_x(\tau)\, \frac{\operatorname{sen} \omega\tau}{\tau}\, d\tau. \qquad (5.2.29)$$

Comparando la fórmula (5.2.27) con la (5.2.26), vemos que la función espectral representa la dispersión sumaria de los armónicos de todas las frecuencias de 0 a ω que forman parte de la función aleatoria $X(t)$.

La fórmula (5.2.21) expresa la función aleatoria estacionaria $X(t)$ del tipo examinado a través de otras dos funciones aleatorias

$U(\omega)$ y $Z(\omega)$ cuyo argumento es la frecuencia ω. Estudiemos las propiedades de estas funciones aleatorias partiendo de las propiedades ya estudiadas de las funciones aleatorias $U_T(\omega_\nu)$ y $Z_T(\omega_\nu)$. De (5.2.15) está claro que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ no están correlacionadas. Además, de (5.2.15) se ve que los valores de cada una de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ para cualesquiera valores, tan próximos como se quiera pero diferentes, del argumento ω están no correlacionados. Las dispersiones de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$, en virtud de la fórmula (5.2.17), son infinitas. Ahora bien,

$$K_u(\omega, \omega') = M[U(\omega)\,U(\omega')] = 0 \text{ si } \omega' \neq \omega, \quad K_u(\omega,\omega) = D[U(\omega)] = \infty. \tag{5.2.30}$$

Las igualdades análogas son válidas para la función correlativa de la función aleatoria $Z(\omega)$. Por fin, la fórmula (5.2.20), al pasar al espectro continuo de frecuencias, toma la forma

$$\int_0^\infty K_u(\omega,\ \omega')\,d\omega' = s_{1x}(\omega). \tag{5.2.31}$$

De las igualdades (5.2.30) y (5.2.31) se ve que la función correlativa de la función aleatoria $U(\omega)$, que se examina como función ω' para cualquier valor fijo de ω, representa una función delta impulsiva con el coeficiente $s_{1x}(\omega)$. Tal deducción es válida también con respecto a la función correlativa de la función aleatoria $Z(\omega)$. Así pues, las funciones correlativas de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ se determinan por la fórmula

$$K_u(\omega,\ \omega') = K_z(\omega,\ \omega') = s_{1x}(\omega)\,\delta(\omega' - \omega) \tag{5.2.32}$$

A primera vista parece que las funciones correlativas de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$, determinadas por la fórmula (5.2.32), no satisfacen la condición de simetría, obligatoria para cualquier función correlativa. Sin embargo, esto solamente parece. En efecto, como la función delta es igual a cero para cualquier $\omega' \neq \omega$, no importa absolutamente a qué sea igual el multiplicador adjunto a la función delta cuando $\omega' \neq \omega$. Lo que importa es que para $\omega' = \omega$ éste sea igual a $s_{1x}(\omega)$. Por eso la fórmula (5.2.32) se puede escribir en la forma

$$K_u(\omega,\ \omega') = K_z(\omega,\ \omega') = \sqrt{s_{1x}(\omega)\,s_{1x}(\omega')}\,\delta(\omega' - \omega). \tag{5.2.33}$$

Para cualquier $\omega' \neq \omega$ la última expresión de esta fórmula es igual a cero, lo mismo que en la fórmula (5.2.32). Cuando $\omega' = \omega$, el multiplicador adjunto a la función delta en la fórmula (5.2.33) lo mismo que en la fórmula (5.2.32), es igual a $s_{1x}(\omega)$.

Vemos que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ de la frecuencia ω disponen de una serie de propiedades particulares. Los valores de

cada una de ellas para cualesquiera, tan próximos como se quiera, valores del argumento ω, ω' no están correlacionados y sus dispersiones son infinitas. Esto quiere decir que las realizaciones de estas funciones aleatorias se comportan desordenadamente y pueden cambiar tan fuertemente como se quiera al pasar de un valor del argumento a otro, aunque éste sea muy próximo al primero. Estas funciones aleatorias no son estacionarias, puesto que sus funciones correlativas, según muestra la fórmula (5.2.33), dependen no solamente de la diferencia de los argumentos, sino también de cada uno de los argumentos tomados por separado. No obstante, a pesar de estas particularidades, las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ son, en el caso general, considerablemente más simples que la función aleatoria estacionaria $X(t)$ que se expresa por medio de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ por la fórmula (5.2.21). Esto explica la gran importancia práctica de las descomposiciones espectrales de las funciones aleatorias estacionarias de la forma (5.2.21).

Hasta ahora hemos supuesto que las magnitudes aleatorias $U(\omega)\,d\omega$, $Z(\omega)\,d\omega$ de la fórmula (5.2.21) tienen dispersiones infinitesimales $s_{1x}(\omega)\,d\omega$, es decir, que el espectro de frecuencias es continuo. Sin embargo, es fácil ver que las fórmulas (5.2.21) y (5.2.23) abarcan también el caso anteriormente examinado del espectro discreto de frecuencias. En efecto, poniendo en (5.2.21) y (5.2.23)

$$U(\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu \delta(\omega - \omega_\nu), \quad Z(\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu \delta(\omega - \omega_\nu), \quad (5.2.34)$$

$$s_{1x}(\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu \delta(\omega - \omega_\nu), \quad (5.2.35)$$

donde $U_1, \ldots, U_n, Z_1, \ldots, Z_n$ son magnitudes aleatorias no correlacionadas, siendo $D[U_\nu] = D[Z_\nu] = D_\nu$, reduciremos la fórmula (5.2.21) a la forma (5.2.1) y la fórmula (5.2.23) a la forma (5.2.6). Es fácil ver que la fórmula (5.2.22), que expresa la densidad espectral a través de la función correlativa, es válida también en este caso. En efecto, sustituyendo en la fórmula (5.2.22) la expresión (5.2.6) de la función correlativa, obtendremos

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu \cos \omega_\nu \tau \cos \omega \tau \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu \left\{ \int_0^\infty \cos(\omega - \omega_\nu)\tau \, d\tau + \int_0^\infty \cos(\omega + \omega_\nu)\tau \, d\tau \right\}.$$

Pero

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda\tau \, d\tau = \delta(\lambda).$$

[(Véase la fórmula (2.2.24)]. Por lo tanto,

$$s_{1x}(\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu [\delta(\omega - \omega_\nu) + \delta(\omega + \omega_\nu)].$$

Pero, como $\omega > 0$, $\omega_\nu > 0$, entonces $\omega + \omega_\nu$, cualquiera que sea el valor positivo de ω, no se convierte en cero y, por consiguiente, $\delta(\omega + \omega_\nu) = 0$ ($\nu = 1, \ldots, n$) y obtenemos la fórmula (5.2.35) lo que demuestra la afirmación enunciada. Así pues, las fórmulas (5.2.22) y (5.2.23) son válidas también en el caso de un espectro discreto.

En el caso general, cuando las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ representan las sumas de las funciones aleatorias $U_1(\omega)$ y $Z_1(\omega)$ del tipo anteriormente examinado y de las combinaciones lineales de las funciones delta con coeficientes aleatorios no correlacionados, la fórmula (5.2.21) determina la función aleatoria estacionaria con un espectro mixto, que es un espectro continuo con frecuencias aisladas, repartidas en él, a las cuales corresponden armónicos aislados con dispersiones finitas. La densidad espectral de tal función aleatoria contiene, en forma de sumando, una combinación lineal de funciones delta correspondientes a todas las frecuencias aisladas.

Así, hemos estudiado una clase determinada de funciones aleatorias estacionarias que tienen una estructura definida, es decir, todas las funciones aleatorias estacionarias que constan de oscilaciones armónicas de diferentes frecuencias con amplitudes y fases aleatorias. Todas las funciones aleatorias de este tipo se expresan por la fórmula (5.2.21) y para ellas son válidas las correlaciones (5.2.22) y (5.2.23) entre la función correlativa y la densidad espectral. Cabe preguntar: ¿existen o no otras funciones aleatorias estacionarias, no representables por la descomposición espectral (5.2.21), para las cuales las fórmulas (5.2.22) y (5.2.23) no son válidas? Resulta que no. Cualquier función aleatoria estacionaria es representable por la descomposición espectral (5.2.21). Para toda función aleatoria estacionaria que se puede encontrar en los problemas prácticos existe la densidad espectral (que puede contener como sumando una combinación lineal de funciones delta), determinable por la fórmula (5.2.22), y su función correlativa se expresa mediante la densidad espectral por la fórmula (5.2.23). Nosotros demostraremos esto en el § 6.6.

La fórmula (5.2.23) fue obtenida por primera vez por N. Wiener para una clase limitada de procesos aleatorios estacionarios y un poco más tarde por A. Ya. Jinchin para cualesquiera procesos aleatorios estacionarios. Por eso las fórmulas (5.2.22) y (5.2.23) se llaman comúnmente fórmulas de Wiener-Jinchin y el hecho de que la función correlativa de cualquier función aleatoria estacionaria puede ser representada en la forma (5.2.23) se denomina teorema de Wiener-Jinchin.

Si en la fórmula (5.2.21)

$$U(\omega) = U\delta(\omega - \Omega), \quad Z(\omega) = Z\delta(\omega - \Omega),$$

donde U, Z son magnitudes aleatorias no correlacionadas con equivalentes dispersiones iguales a D, y Ω es una magnitud aleatoria independiente de U y Z, entonces la fórmula (5.2.21) toma la forma

$$X(t) = m_x + U \operatorname{sen} \Omega t + Z \cos \Omega t. \tag{5.2.36}$$

Ahora bien, la fórmula (5.2.21) abarca, como un caso particular, también funciones aleatorias estacionarias que representan sinusoides de frecuencia aleatoria con amplitudes y fases aleatorias. En el ejemplo 4.2.3 se mostró que la función correlativa de una función aleatoria (5.2.36) se determina por la fórmula

$$k_x(\tau) = D \int_0^\infty f(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega, \tag{5.2.37}$$

donde $f(\omega)$ es la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Ω. Comparando la fórmula (5.2.37) con (5.2.23), vemos que la densidad espectral de la función aleatoria (5.2.36) es igual al producto de la dispersión de las funciones aleatorias U y Z por la densidad de probabilidad de la frecuencia aleatoria Ω:

$$s_{1x}(\omega) = Df(\omega) \tag{5.2.38}$$

De la fórmula (5.2.38) se ve que para cualquier densidad espectral asignada $s_{1x}(\omega)$ se puede escoger tal densidad de probabilidad $f(\omega)$ de la frecuencia aleatoria de oscilaciones Ω que la función aleatoria (5.2.36) tenga la densidad espectral $s_{1x}(\omega)$. En efecto, integrando la fórmula (5.2.38) con respecto a ω de 0 a ∞ y teniendo en cuenta que $f(\omega) = 0$ cuando $\omega < 0$, obtendremos

$$\int_0^\infty s_{1x}(\omega) \, d\omega = D \int_0^\infty f(\omega) \, d\omega = D. \tag{5.2.39}$$

Al determinar de este modo D, hallaremos de la fórmula (5.2.38) $f(\omega)$:

$$f(\omega) = \frac{s_{1x}(\omega)}{D} = \frac{s_{1x}(\omega)}{\int_0^\infty s_{1x}(\omega) \, d\omega}. \tag{5.2.40}$$

Así pues, entre la infinidad de todas las funciones aleatorias estacionarias posibles que tienen la densidad espectral dada $s_{1x}(\omega)$ y dispersión finita, siempre existen tales funciones aleatorias todas las realizaciones posibles de las cuales son sinusoides puras. Estas funciones aleatorias se determinan por la fórmula (5.2.36) en la cual

la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Ω se define por la fórmula (5.2.40). Además de estas funciones aleatorias, existe una infinidad de otras funciones aleatorias estacionarias, con la densidad espectral dada $s_{1x}(\omega)$, cuyas realizaciones no son sinusoides, sino que representan las combinaciones lineales de una infinidad de sinusoides. Tales realizaciones pueden ser funciones continuas o pueden tener también puntos de discontinuidad de primer género, como vimos en los ejemplos dados en el § 4.2.

Las fórmulas (5.2.22) y (5.2.23) muestran que la densidad espectral es una característica muy importante de la función aleatoria estacionaria. Conociendo la densidad espectral, se puede hallar por la fórmula (5.2.23) la función correlativa y, al contrario, conociendo la función correlativa, se puede determinar por la fórmula (5.2.22) la densidad espectral. Ahora bien, para la función aleatoria estacionaria no importa absolutamente cuál es la característica que se asigna: la función correlativa o la densidad espectral. Generalmente en las aplicaciones es más conveniente asignar la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria.

Ejemplo 5.2.1. Hallar la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria con función correlativa exponencial

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}. \tag{5.2.41}$$

Por la fórmula (5.2.22) hallamos

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega\tau\,d\tau = \frac{2D}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\omega\tau\,d\tau \tag{5.2.42}$$

La integral en esta fórmula se calcula fácilmente mediante la integral por partes. Teniendo en vista obtener fórmulas más generales necesarias para los ejemplos que se dan a continuación, sustituyamos ω por la magnitud μ. Entonces obtendremos

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\mu\tau\,d\tau = \frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha}\cos\mu\tau\Big|_0^\infty - \frac{\mu}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\operatorname{sen}\mu\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu}{\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\operatorname{sen}\mu\tau\,d\tau. \tag{5.2.43}$$

Volviendo a integrar por partes, obtendremos

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\mu\tau d\tau = \frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha^2}e^{-\alpha\tau}\operatorname{sen}\mu\tau\Big|_0^\infty - \frac{\mu^2}{\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\mu\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu^2}{\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\mu\tau\,d\tau.$$

De aquí hallamos

$$\alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau \, d\tau = \alpha - \mu^2 \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau \, d\tau$$

y

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau \, d\tau = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}. \tag{5.2.44}$$

Sustituyendo esta expresión en el primer miembro de la fórmula (5.2.43) y despejando la integral que ha quedado en la ecuación obtenida, tendremos

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \operatorname{sen} \mu\tau \, d\tau = \frac{\mu}{\alpha^2 + \mu^2}. \tag{5.2.45}$$

Sustituyendo la expresión (5.2.44) siendo $\mu = \omega$ en la fórmula (5.2.42), hallaremos la densidad espectral de la función aleatoria que nos interesa:

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \tag{5.2.46}$$

Por el contrario, considerando asignada la densidad espectral, podemos determinar, por la fórmula (5.2.23), la función correlativa:

$$k_x(\tau) = \frac{2D\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega\tau}{\alpha^2 + \omega^2} \, d\omega.$$

Esta integral se puede calcular por la fórmula (23) del suplemento. Como resultado obtendremos la fórmula (5.2.41).

Ejemplo 5.2.2. Hallar la densidad espectral de la función aleatoria estacionaria cuya función correlativa se determina por la fórmula

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau. \tag{5.2.47}$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (5.2.22), hallamos

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \cos \omega\tau \, d\tau =$$

$$= \frac{D}{\pi} \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \cos(\omega - \omega_0)\tau \, d\tau + \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \cos(\omega + \omega_0)\tau \, d\tau \right\}.$$

La primera de estas integrales se determina por la fórmula (5.2.44) siendo $\mu = \omega - \omega_0$ y la segunda, por la misma fórmula (5.2.44) siendo $\mu = \omega + \omega_0$. Por consiguiente,

$$s_{1x}(\omega) = \frac{D}{\pi} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$$

o bien

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi} \frac{\beta^2 + \omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2. \tag{5.2.48}$$

El problema inverso referente a la determinación de la función correlativa, teniendo dada la densidad espectral, lo resolveremos para el caso en cuestión en el párrafo siguiente.

Ejemplo 5.2.3. Hallar la densidad espectral de la función aleatoria estacionaria cuya función correlativa se determina por la fórmula

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau + \gamma \operatorname{sen}(\omega_0|\tau|). \tag{5.2.49}$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (5.2.22), hallamos

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau + \gamma \operatorname{son}\omega_0|\tau|)\cos\omega\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{D}{\pi}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos(\omega_0-\omega)\tau\, d\tau + \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos(\omega_0+\omega)\tau\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \gamma\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\operatorname{son}(\omega_0-\omega)\tau\, d\tau + \gamma\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\operatorname{sen}(\omega_0+\omega)\tau\, d\tau\right].$$

Las integrales de esta fórmula se calculan fácilmente por las fórmulas (5.2.44) y (5.2.45). Como resultado obtendremos

$$s_{1x}(\omega) = \frac{D}{\pi}\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega_0-\omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega_0+\omega)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma(\omega_0-\omega)}{\alpha^2+(\omega_0-\omega)^2} + \frac{\gamma(\omega_0+\omega)}{\alpha^2+(\omega_0+\omega)^2}\right]$$

o bien

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D}{\pi}\,\frac{(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2+(\alpha-\gamma\omega_0)\omega^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\omega^2+\omega^4}, \quad \beta^2=\alpha^2+\omega_0^2. \tag{5.2.50}$$

El problema inverso referente a la determinación de la función correlativa, teniendo dada la densidad espectral, lo resolveremos tambien para este caso en el párrafo siguiente.

Puesto que la densidad espectral, por su sentido, no puede ser negativa para ningún valor de ω, la fórmula (5.2.50) tiene sentido solamente cuando $|\gamma| \leqslant \alpha/\omega_0$ lo que antes fue mostrado por otra vía.

Ejemplo 5.2.4. Hallar la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ cuya densidad espectral es constante en el intervalo $(0, \omega_0)$ e igual a cero fuera de este intervalo:

$$s_{1x}(\omega) = \begin{cases} s_1 & \text{si} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0, \\ 0 & \text{si} \quad \omega > \omega_0. \end{cases} \tag{5.2.51}$$

Por la fórmula (5.2.23) hallamos

$$k_x(\tau) = s_1\int_0^{\omega_0}\cos\omega\tau\, d\omega = s_1\frac{\operatorname{sen}\omega\tau}{\tau}\Big|_0^{\omega_0} = s_1\frac{\operatorname{sen}\omega_0\tau}{\tau}.$$

Así pues

$$k_x(\tau) = s_1\frac{\operatorname{sen}\omega_0\tau}{\tau}. \tag{5.2.52}$$

Dejamos al lector que por sí mismo compruebe que a esta función correlativa le corresponde una densidad espectral constante en el intervalo $(0, \omega_0)$, que se determina por la fórmula (5.2.51).

§ 5.3. Descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria en forma compleja

En el párrafo precedente obtuvimos la descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria real en forma real [fórmula (5.2.21)]:

$$X(t) = m_x + \int_0^\infty [U(\omega) \operatorname{sen} \omega t + Z(\omega) \cos \omega t]\, d\omega. \qquad (5.3.1)$$

Sin embargo, en los problemas prácticos es más conveniente de ordinario representar las oscilaciones armónicas en forma compleja con ayuda de las conocidas fórmulas de Euler que expresan las funciones trigonométricas a través de las funciones exponenciales del argumento imaginario. Por eso reducimos la descomposición espectral (5.3.1) a la forma compleja. Sustituyendo en la fórmula (5.3.1) las expresiones de las funciones trigonométricas por las fórmulas de Euler

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \qquad \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},$$

obtendremos

$$X(t) = m_x + \int_0^\infty \left[\frac{U(\omega)}{2i} + \frac{Z(\omega)}{2}\right] e^{i\omega t}\, d\omega + \int_0^\infty \left[-\frac{U(\omega)}{2i} + \frac{Z(\omega)}{2}\right] e^{-i\omega t}\, d\omega.$$

Sustituyamos en la segunda integral las variables $\omega = -\mu$. Entonces obtendremos

$$X(t) = m_x + \int_0^\infty \frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} e^{i\omega t}\, d\omega + \int_{-\infty}^0 \frac{Z(-\mu) + iU(-\mu)}{2} e^{i\mu t}\, d\mu.$$

En la segunda integral podemos sustituir de nuevo la variable de integración μ por la variable ω puesto que la designación de la variable de integración en la integral definida no es esencial:

$$X(t) = m_x + \int_0^\infty \frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} e^{i\omega t}\, d\omega + \int_{-\infty}^\infty \frac{Z(-\omega) + iU(-\omega)}{2} e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Introduciendo la función aleatoria compleja $V(\omega)$ determinada por la fórmula

$$V(\omega) = \begin{cases} \dfrac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} & \text{si } \omega > 0, \\ \dfrac{Z(-\omega) + iU(-\omega)}{2} & \text{si } \omega > 0. \end{cases} \qquad (5.3.2)$$

podemos unir ambas integrales en una única y escribir la fórmula obtenida en la forma

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \qquad (5.3.3)$$

Esta fórmula ofrece la descomposición espectral buscada de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ en forma compleja. Esta descomposición se puede aplicar con mayor sencillez que la (5.3.1) puesto que todas las operaciones del análisis se cumplen mucho más simplemente con una función exponencial que con las trigonométricas, y además, la expresión (5.3.3) es más compacta que (5.3.1). Por fin, la fórmula (5.3.3) expresa la función aleatoria estacionaria $X(t)$ a través de una función aleatoria $V(\omega)$, mientras que la fórmula (5.3.1) la expresa mediante dos funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$.

Comparando las fórmulas (5.3.1) y (5.3.3), vemos que la integración en la fórmula (5.3.1) se extiende a todos los valores positivos de la frecuencia ω, y en la fórmula (5.3.3), a todos los valores de ω tanto positivos como negativos. Este hecho puramente matemático no tiene sentido físico y es consecuencia de que el seno y el coseno de la frecuencia positiva ω se expresan por las fórmulas de Euler por medio de dos funciones exponenciales $e^{i\omega t}$ y $e^{-i\omega t}$. En realidad, ambas estas funciones representan una forma compleja de las oscilaciones armónicas de una misma frecuencia ω que, por su sentido físico, siempre es positiva. Por eso, como siempre al emplear la forma compleja de oscilaciones armónicas, las frecuencias negativas son una abstracción matemática y se introducen solamente para mayor sencillez y comodidad.

Estudiemos ahora las propiedades de la función aleatoria compleja $V(\omega)$. Ante todo, de la definición (5.3.2) de la función aleatoria $V(\omega)$ está claro que su esperanza matemática es idénticamente igual a cero, puesto que las esperanzas matemáticas de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ son iguales a cero. Hallemos la función correlativa de la función aleatoria $V(\omega)$. Cuando $\omega > 0$, $\omega' > 0$, teniendo en cuenta que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ no están correlacionadas, podemos escribir

$$K_v(\omega, \omega') = M\left[\frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} \cdot \overline{\frac{Z(\omega') - iU(\omega')}{2}}\right] =$$

$$= M\left[\frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} \cdot \frac{Z(\omega') + iU(\omega')}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\{M[Z(\omega)\, Z(\omega')] + M[U(\omega)\, U(\omega')]\} =$$

$$= \frac{1}{4}[K_z(\omega, \omega') + K_u(\omega, \omega')].$$

De aquí, tomando en consideración la fórmula (5.2.32) para las funciones correlativas de las funciones aleatorias $Z(\omega)$ y $U(\omega)$, obtendremos

$$K_v(\omega, \omega') = \frac{1}{2} s_{1x}(\omega)\,\delta(\omega-\omega') \text{ si } \omega>0,\ \omega'>0. \quad (5.3.4)$$

Cuando $\omega<0,\ \omega'<0$

$$K_v(\omega, \omega') = M\left[\frac{Z(-\omega)+iU(-\omega)}{2}\cdot\overline{\frac{Z(-\omega')+iU(-\omega')}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\{M[Z(-\omega)Z(-\omega')]+M[U(-\omega)U(-\omega')]\} =$$

$$= \frac{1}{4}[K_z(|\omega|, |\omega'|)+K_u(|\omega|, |\omega'|)].$$

De aquí, volviendo a aplicar la fórmula (5.2.32) y teniendo en cuenta que $|\omega'|-|\omega| = \omega-\omega'$ cuando $\omega<0,\ \omega'<0$, obtendremos

$$K_v(\omega, \omega') = \frac{1}{2} s_{1x}(|\omega|)\,\delta(\omega-\omega') \text{ si } \omega<0,\ \omega'<0. \quad (5.3.5)$$

Para $\omega>0,\ \omega<0$

$$K_v(\omega, \omega') = M\left[\frac{Z(\omega)-iU(\omega)}{2}\cdot\overline{\frac{Z(-\omega')+iU(-\omega')}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\{M[Z(\omega)Z(-\omega')]-M[U(\omega)U(-\omega')]\} =$$

$$= \frac{1}{4}[K_z(\omega, |\omega'|)-K_u(\omega, |\omega'|)].$$

De aquí, en virtud de la fórmula (5.2.32) se deriva que para $\omega>0,\ \omega'<0$

$$K_v(\omega, \omega') = \frac{1}{4}[s_{1x}(\omega)\,\delta(\omega-|\omega'|)-s_{1x}(\omega)\,\delta(\omega-|\omega'|)] = 0. \quad (5.3.6)$$

El mismo resultado obtendremos también cuando $\omega<0,\ \omega'>0$ lo que, además, está claro directamente de la propiedad de simetría de la función correlativa. Introduciendo una nueva función

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2} s_{1x}(|\omega|), \quad (5.3.7)$$

podemos escribir la expresión obtenida de la función correlativa de la función aleatoria $V(\omega)$ para todos los valores de ω y ω' en la forma

$$K_v(\omega, \omega') = s_x(\omega)\,\delta(\omega-\omega'). \quad (5.3.8)$$

Ahora bien, la función aleatoria $V(\omega)$ posee completamente las mismas propiedades que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ en la fórmula (5.3.1). Los valores de la función aleatoria $V(\omega)$ para cualesquiera valores diferentes de ω y ω' no están correlacionados. Su dis-

persión es infinita y la función correlativa es proporcional a la función delta.

Sustituyendo en la fórmula (5.3.7) la expresión (5.2.22) de la densidad espectral $s_{1x}(\omega)$ y tomando en consideración que $\cos|\omega|\tau = \cos\omega\tau$, obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty k_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

Aquí la función subintegral es par. Por eso la integral en los límites de 0 a ∞ puede ser sustituida por la mitad de la integral en los límites de $-\infty$ a ∞. Entonces tendremos

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty k_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \tag{5.3.9}$$

Por otro lado, podemos escribir

$$0 = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty k_x(\tau)\,\mathrm{sen}\,\omega\tau\, d\tau, \tag{5.3.10}$$

puesto que la función subintegral es aquí impar y la integral se toma en límites simétricos. Multiplicando la fórmula (5.3.10) por la unidad imaginaria i, sustrayéndola de la fórmula (5.3.9) y teniendo en cuenta que

$$\cos\omega\tau - i\,\mathrm{sen}\,\omega\tau = e^{-i\omega\tau},$$

obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{5.3.11}$$

Sustituyamos ahora en la fórmula (5.2.23) la expresión de la densidad espectral $s_{1x}(\omega)$ de (5.3.7). Entonces tendremos

$$k_x(\tau) = 2\int_0^\infty s_x(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega. \tag{5.3.12}$$

Pero la función $s_x(\omega)$ es par:

$$s_x(-\omega) = s_x(\omega), \tag{5.3.13}$$

lo que se ve directamente de su definición (5.3.7) o de la fórmula (5.3.9). Por consiguiente, la integral en (5.3.12) es igual a la mitad de la integral extendida a todo el eje numérico de $-\infty$ a ∞ y podemos escribir esta fórmula en la forma

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^\infty s_x(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega. \tag{5.3.14}$$

Ahora observemos que debido a la paridad de la función $s_x(\omega)$ y la imparidad del seno

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \operatorname{sen} \omega\tau \, d\tau.$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad imaginaria i, sumándola miembro a miembro (5.3.14) y tomando en consideración que

$$\cos \omega\tau + i \operatorname{sen} \omega\tau = e^{-i\omega\tau},$$

obtendremos

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \qquad (5.3.15)$$

De este modo hemos obtenido la descomposición espectral de la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ en forma compleja.

Poniendo en (5.3.15) $\tau = 0$, obtendremos la siguiente expresión para la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$D_x = k_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) d\omega. \qquad (5.3.16)$$

Así pues, hemos obtenido la descomposición espectral de la función aleatoria estacionaria (5.3.3), que representa su descomposición en sumandos infinitesimales no correlacionados de la forma $V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ que expresan las oscilaciones armónicas con amplitudes aleatorias infinitesimales en forma compleja, y las descomposiciones correspondientes de la función correlativa y de la dispersión (5.3.15) y (5.3.16). Las magnitudes aleatorias $V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ y $V(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ cualquiera que sea el valor de ω, tienen una misma dispersión igual a $s_x(\omega) d\omega$. La fórmula (5.3.16) enuncia que la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ es igual a la suma de dispersiones de los sumandos no correlacionados que forman parte de la expresión (5.3.3.).

Lo expuesto muestra que la función $s_x(\omega)$ caracteriza la distribución de la dispersión de una función aleatoria estacionaria referente al espectro de frecuencias, al igual que la función $s_{1x}(\omega)$ introducida en el párrafo anterior. La diferencia entre ellas consiste solamente en que la función $s_{1x}(\omega)$, de acuerdo con el sentido físico, determina por completo la dispersión del armónico correspondiente a cada valor dado de la frecuencia $\omega > 0$, mientras que la función $s_x(\omega)$ divide a esta dispersión en partes iguales entre las dos componentes complejas $V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ y $V(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ que corresponden al valor dado de la frecuencia ω. Con otras palabras, en una descomposición espectral real (5.2.21) de una función aleatoria estacionaria cada armónico

está representado por un sumando

$$[U(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t + Z(\omega)\cos\omega t]\,d\omega,$$

correspondiente al valor dado de la frecuencia $\omega > 0$, mientras que en una descomposición espectral compleja (5.3.3) cada armónico está representado por dos sumandos

$$V(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \text{ y } V(-\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega$$

y la dispersión de este armónico se divide en partes iguales entre estos sumandos. Por eso la función $s_{1x}(\omega)$ está determinada sólo en el campo de frecuencias positivas reales físicamente, mientras que la función $s_x(\omega)$ está determinada para todas las frecuencias tanto negativas como positivas, aunque las últimas existen sólo matemáticamente. En la fig. 5.3.1 se muestra la relación entre las funciones $s_x(\omega)$ y $s_{1x}(\omega)$.

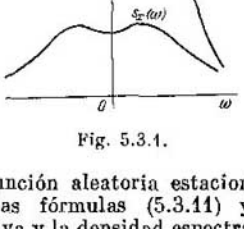


Fig. 5.3.1.

Como la función $s_x(\omega)$ tiene el mismo sentido que la $s_{1x}(\omega)$ y la diferencia entre ellas se determina solamente por la forma matemática de registro de la descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria real, la función $s_x(\omega)$ se llama *densidad espectral* de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ al igual que la función $s_{1x}(\omega)$. Las fórmulas (5.3.11) y (5.3.15) que ligan la función correlativa y la densidad espectral $s_x(\omega)$ representan una forma compleja de las fórmulas de Wiener—Jinchin (5.2.22) y (5.2.23).

En aplicaciones prácticas es siempre más conveniente utilizar la forma compleja de la descomposición espectral. Por eso, en lo sucesivo, al hablar de la densidad espectral, siempre tendremos en cuenta la densidad espectral $s_x(\omega)$ determinada en todo el eje numérico ω.

Además de la densidad espectral $s_x(\omega)$, para la descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria es conveniente introducir la función espectral

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} s_x(\mu)\,d\mu. \tag{5.3.17}$$

Es obvio que la densidad espectral es la derivada de la función espectral:

$$s_x(\omega) = S_x'(\omega). \tag{5.3.18}$$

Sustituyendo en la fórmula (5.3.17) la expresión (5.3.11) de la densidad espectral y cumpliendo la integración con respecto a μ obtendremos la siguiente expresión de la función espectral a través de la fun-

ción correlativa:

$$S_x(\omega) - S_x(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) \frac{1 - e^{-i\omega\tau}}{\tau} d\tau. \qquad (5.3.19)$$

Ejemplo 5.3.1. Para la función correlativa exponencial

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|} \qquad (5.3.20)$$

la fórmula (5.3.11) ofrece la siguiente expresión de la densidad espectral:

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau.$$

Para cumplir la integración, observemos que $|\tau| = \tau$ cuando $\tau > 0$ y $|\tau| = -\tau$ cuando $\tau < 0$. Por eso, dividiendo el intervalo de integración en dos partes, obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau \right] =$$

$$= \frac{D}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} \right]$$

o bien, reduciendo los quebrados a un común denominador,

$$s_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \qquad (5.3.21)$$

Esto resultado concuerda por completo con (5.2.46).

Ejemplo 5.3.2. Para la función correlativa

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \qquad (5.3.22)$$

la fórmula (5.3.11) da

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} \cos \omega_0 \tau \, d\tau.$$

Dividiendo el intervalo de integración en dos partes y expresando el coseno por medio de las funciones exponenciales, obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{D}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\omega + i\omega_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\omega - \omega_0)\tau} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega - i\omega_0)\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega + i\omega_0)\tau} d\tau \right] =$$

$$= \frac{D}{4\pi} \left[\frac{1}{\alpha + i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{\alpha - i(\omega_0 + \omega)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha - i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{\alpha + i(\omega_0 + \omega)} \right].$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador y poniendo $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$, obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}. \tag{5.3.23}$$

Ejemplo 5.3.3. Para una función correlativa más general

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau + \gamma \operatorname{sen}\omega_0|\tau|). \tag{5.3.24}$$

hallamos de un modo completamente análogo

$$s_x(\omega) = \frac{D}{4\pi}\left[\frac{1+i\gamma}{\alpha + i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1-i\gamma}{\alpha - i(\omega_0 + \omega)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-i\gamma}{\alpha - i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1+i\gamma}{\alpha + i(\omega_0 + \omega)}\right]$$

o bien, suprimiendo las magnitudes imaginarias,

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi}\left[\frac{\alpha - \gamma(\omega - \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha + \gamma(\omega + \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2}\right]. \tag{5.3.25}$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador, obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{(\alpha + \gamma\omega_0)\beta^2 + (\alpha - \gamma\omega_0)\omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}. \tag{5.3.26}$$

Es evidente que la fórmula (5.3.23) es un caso particular de esta fórmula cuando $\gamma = 0$. En otro caso particular, cuando $\gamma = \alpha/\omega_0$ la fórmula (5.3.26) toma la forma

$$s_x(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}. \tag{5.3.27}$$

Este caso particular tiene una importancia práctica especial, puesto que corresponde a la función aleatoria diferenciable $X(t)$ que tiene la derivada con dispersión finita (véase el ejemplo 4.6.1).

Resolvamos ahora el problema inverso: considerando asignada la densidad espectral (5.3.26), hallamos la función correlativa. Sustituyendo la expresión (5.3.25) en la fórmula (5.3.15), tendremos

$$k_x(\tau) = \frac{D}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha - \gamma(\omega - \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} e^{i\omega\tau}\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha + \gamma(\omega + \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} e^{i\omega\tau}\, d\omega\right].$$

Sustituyendo las variables $\omega = \mu + \omega_0$ en la primera integral y $\omega = \mu - \omega_0$ en la segunda, la fórmula obtenida se reduce a la forma

$$k_x(\tau) = \frac{D}{\pi}\left[\alpha\cos\omega_0\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau}\, d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} - i\gamma \operatorname{sen}\omega_0\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu\tau}\, d\mu}{\alpha^2 + \mu^2}\right].$$

De aquí, tomando en consideración que [véase las fórmulas (16) y (22) del suplemento]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau}\, d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu\tau}\, d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \begin{cases} i\pi e^{-\alpha|\tau|} & \text{si } \tau > 0, \\ -i\pi e^{-\alpha|\tau|} & \text{si } \tau < 0, \end{cases}$$

obtendremos, como era de esperar, la fórmula (5.3.24). En el caso particular, cuando $\gamma = 0$, obtendremos para la función correlativa la fórmula (5.3.22).

En el § 5.1 vimos que la derivada de una función aleatoria estacionaria diferenciable es siempre estacionaria. Por eso se puede plantear el problema: hallar la densidad espectral de la derivada de una función aleatoria estacionaria. Conforme a la fórmula (5.1.12) la función correlativa de la derivada $Y_1(t) = X'(t)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ es

$$k_{y1}(\tau) = -k_x''(\tau).$$

Sustituyendo aquí la expresión (5.3.15) de la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ obtendremos

$$k_{y1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 s_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

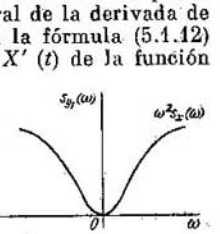


Fig. 5.3.2.

Comparando esta fórmula con (5.3.15), vemos que la densidad espectral de la derivada $Y_1(t)$ se determina por la fórmula

$$s_{y1}(\omega) = \omega^2 s_x(\omega). \tag{5.3.28}$$

Así pues, la derivación de una función aleatoria estacionaria conduce a la multiplicación de su densidad espectral por ω^2.

De la fórmula (5.3.28) se ve que la densidad espectral de la derivada de una función aleatoria estacionaria es igual a cero para $\omega = 0$ y la curva que la refleja toca al eje de abscisas en el origen de coordenadas (fig. 5.3.2). De aquí resulta que, para que la integral de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ sea una función aleatoria estacionaria con dispersión finita, es necesario que la densidad espectral de la función aleatoria $X(t)$ y su primera derivada se conviertan en cero cuando $\omega = 0$.

Examinando las expresiones de la densidad espectral obtenidas en los ejemplos anteriores, vemos que la integral de la densidad espectral, multiplicada por ω^2, se convergerá y, por consiguiente, la dispersión de la derivada de la función aleatoria será finita sólo para la densidad espectral (5.3.26) cuando $\gamma = \alpha/\omega_0$.

Es fácil comprender que toda densidad espectral continua $s_x(\omega)$ que no se convierte en cero cualquiera que sea el valor de ω y que tiende asintóticamente a cero cuando $\omega \to \pm\infty$, se puede aproximar, con cualquier grado de precisión, por una función fraccionaria racional, es decir, por la relación de dos polinomios. En efecto, como es sabido, toda función continua, en cualquier intervalo finito de variación de la variable independiente, puede ser aproximada, con el grado de precisión deseado, por un polinomio. Puesto que por suposición, la densidad espectral $s_x(\omega)$ no es igual a cero para ningún valor de ω y tiende asintóticamente a cero cuando $\omega \to \pm\infty$, es conveniente aproximar por el polinomio la magnitud inversa $1/s_x(\omega)$. Con ello, la densidad espectral $s_x(\omega)$ será representada por un que-

brado racional con numerador constante. Claro está que al tomar también en el numerador un polinomio en vez de la constante, se puede todavía más fácilmente alcanzar el grado deseado de precisión de aproximación de la densidad espectral. En este caso en la expresión de la densidad espectral figurarán solamente las potencias pares de ω puesto que la densidad espectral es una función par. Además, todos los coeficientes existentes en el numerador y en el denominador de la expresión de la densidad espectral serán reales. Por eso todas las raíces del numerador y del denominador serán por parejas complejas conjugadas. Ahora bien, todas las raíces del numerador y del denominador de la densidad espectral racional fraccionaria siempre se disponen de un modo simétrico con respecto a los ejes real e imaginario en el plano de la variable compleja ω. Al descomponer este quebrado racional en quebrados simples, siempre podemos agrupar las fracciones correspondientes a cada pareja de las raíces conjugadas puramente imaginarias del denominador y las fracciones correspondientes a cada cuatro raíces del denominador dispuestas simétricamente con respecto a los ejes real e imaginario. Como resultado obtendremos para cada cuatro raíces complejas dispuestas simétricamente un sumando de la forma (5.3.25). A los sumandos del primer tipo les corresponderán en la expresión de la función correlativa las funciones exponenciales, mientras que a los sumandos del segunto tipo les corresponderán las funciónes de la forma (5.3.22) o (5.3.24). Así pues, vemos que la función correlativa de prácticamente toda función aleatoria estacionaria se puede aproximar, con un grado de precisión cualquiera, por una combinación lineal de las tres funciones correlativas tipo examinadas en los ejemplos anteriores. Esto es lo que determina la importancia de las tres funciones correlativas tipo estudiadas.

Está claro que, al igual que en todos otros problemas de aproximación, la representación aproximada de la función correlativa obtenida por esta vía no será única.

Para calcular la integral (5.3.16) al determinar las dispersiones de las funciones aleatorias estacionarias valiéndose de las densidades espectrales conocidas, se puede aplicar la fórmula

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0 (i\omega)^{2n-2} + b_1 (i\omega)^{2n-4} + \ldots + b_{n-2} (i\omega)^2 + b_{n-1}}{|\, a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} i\omega + a_n \,|^2} d\omega =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{\pi}{a_0} \frac{\Delta n}{Dn}, \qquad (5.3.29)$$

donde D_n es el determinante de enésimo orden que se obtiene por la regla siguiente: en la diagonal principal se ponen los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y los sitios vecinos a ellos se llenan por aquellos de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que entran en la línea dada de modo que sus números en cada línea se dispongan en orden decreciente;

los sitios que quedan libres se llenan de ceros

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \quad a_n \end{vmatrix} \tag{5.3.30}$$

Δ_n es el determinante que se obtiene sustituyendo en D_n los elementos de la primera columna por los coeficientes $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \dots 0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \quad a_n \end{vmatrix} \tag{5.3.31}$$

en particular

$$I_1 = \frac{\pi}{a_0}\frac{b_0}{a_1}, \qquad I_2 = -\frac{\pi}{a_0}\frac{b_0 a_2 - b_1 a_0}{a_1 a_2},$$

$$I_3 = \frac{\pi}{a_0}\begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 \\ b_2 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}, \qquad I_4 = \frac{\pi}{a_0}\begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_3 & 0 & 0 & a_4 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

§ 5.4. Noción de ruido blanco

Examinemos la función aleatoria estacionaria $X(t)$ con la densidad espectral constante s_0. Su función correlativa, en virtud de la fórmula (5.3.15), es

$$k_x(\tau) = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

Pero conforme a la fórmula (2.2.22) que expresa la función delta impulsiva en forma de la integral de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\omega = 2\pi\delta(\tau).$$

Por consiguiente, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria con densidad espectral constante s_0 se determina por

la fórmula

$$k_x(\tau) = 2\pi s_0 \delta(\tau). \tag{5.4.1}$$

La función aleatoria estacionaria con densidad espectral constante se llama *ruido blanco estacionario*. Este nombre se explica por cierta analogía que tiene tal función aleatoria con la luz blanca: la luz mencionada representa la suma de todas las componentes espectrales que poseen una misma intensidad; el ruido blanco es la suma de las oscilaciones armónicas de todas las frecuencias que tienen una misma dispersión de amplitud. Con otras palabras, la luminosidad sumaria de la luz blanca está repartida uniformemente en componentes espectrales, es decir, en frecuencias de las oscilaciones electromagnéticas que la componen; la dispersión sumaria del ruido blanco está repartida uniformemente en frecuencias de las oscilaciones armónicas que lo componen.

El multiplicador adjunto a la función delta

$$\nu = 2\pi s_0 \tag{5.4.2}$$

se denomina *intensidad* del ruido blanco estacionario. La función correlativa del ruido blanco estacionario se expresa por medio de la intensidad del mismo por la fórmula

$$k_x(\tau) = \nu\delta(\tau). \tag{5.4.3}$$

La fórmula (5.4.2) muestra que la intensidad del ruido blanco estacionario es igual a la densidad espectral del mismo multiplicada por 2π y, al contrario, la densidad espectral del ruido blanco estacionario es igual a la intensidad del mismo dividida por 2π.

Generalizando la noción de ruido blanco, llamemos *ruido blanco* a toda función aleatoria cuya función correlativa contiene como multiplicador la función delta. En concordancia con esta definición la función correlativa del ruido blanco $X(t)$ se determina por la fórmula

$$K_x(t, t') = G(t)\delta(t-t') = \sqrt{G(t)G(t')}\,\delta(t-t'). \tag{5.4.4}$$

La función $G(t)$ que representa el multiplicador adjunto a la función delta en la expresión de la función correlativa del ruido blanco se denomina intensidad del mismo. En el caso particular, cuando la intensidad del ruido blanco es constante, éste es estacionario. En el caso general, siendo variable la intensidad, el ruido blanco no es estacionario.

La fórmula (5.2.32) muestra que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ son ruidos blancos que tienen una misma intensidad igual a la densidad espectral $s_{1x}(\omega)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$. Semejantemente la fórmula (5.3.8) muestra que la función aleatoria $V(\omega)$ representa un ruido blanco cuya intensidad es igual a la densidad espectral $s_x(\omega)$ de la función aleatoria estacionaria

$X(t)$. La fórmula (5.2.21) ofrece la expresión de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ por medio de los ruidos blancos reales no correlacionados $U(\omega)$ y $Z(\omega)$. Análogamente la fórmula (5.3.3) expresa la función aleatoria estacionaria $X(t)$ mediante el ruido blanco complejo $\mathring{V}(\omega)$.

En el caso general, el ruido blanco $V(\omega)$, al igual que los ruidos blancos $U(\omega)$ y $Z(\omega)$, es no estacionario. Por eso la fórmula (5.3.3.) expresa en el caso general la función aleatoria estacionaria del tiempo $X(t)$ por medio del ruido blanco no estacionario de la frecuencia $V(\omega)$. Y solamente en el caso particular, cuando la densidad espectral s_0 es constante, la fórmula (5.3.3) expresa el ruido blanco estacionario del tiempo $X(t)$, que tiene la intensidad $2\pi s_0$, mediante el ruido blanco estacionario de la frecuencia $V(\omega)$ cuya intensidad es igual a s_0. Así pues, en este caso el ruido blanco estacionario $X(t)$ tiene la densidad espectral s_0 y la intensidad $2\pi s_0$ y el ruido blanco estacionario $V(\omega)$ tiene la intensidad s_0.

El ruido blanco es el tipo más simple de una función aleatoria debido a que sus valores, siendo diferentes los valores del argumento, no están correlacionados. A la expresión de una función aleatoria mediante una función aleatoria más simple (ruido blanco) la llamaremos *representación canónica integral* de la función aleatoria. Las fórmulas (5.2.21) y (5.3.3) dan las representaciones canónicas integrales de cualquier función aleatoria estacionaria. Las representaciones canónicas integrales de las funciones aleatorias son muy cómodas para las aplicaciones. Precisamente esto explica el gran papel que desempeñan las descomposiciones espectrales (5.2.21) y (5.3.3) en las aplicaciones de la teoría de funciones aleatorias estacionarias.

En la naturaleza no hay ruidos blancos perfectos del tipo de la función delta. Esto se explica por el hecho de que en la naturaleza no existen objetos ni procesos carentes por completo de inercia. Por eso en todo fenómeno físico el valor de la función aleatoria en el punto dado determina también en cierto grado los valores de la misma en otros puntos cercanos. No existe tal magnitud física cuyo incremento durante un intervalo de tiempo por muy pequeño que sea pudiera ser tan grande como se quiera. Para crear un proceso aleatorio con el cual alguna magnitud física obtuviera ininterrumpidamente incrementos aleatorios con dispersión infinita se exigiría una potencia infinita. Por eso en la naturaleza existen solamente tales funciones aleatorias cuyos valores, en los puntos suficientemente próximos, están correlacionados.

Así pues, la noción de ruido blanco es solamente una abstracción matemática cómoda. No obstante, como siempre en la práctica, no hay ninguna necesidad de que los objetos reales correspondan exactamente a los conceptos científicos abstractos, en particular, no hay ninguna necesidad de que exista un ruido blanco perfecto. Prácticamente el tiempo y otras magnitudes físicas se miden siempre

con precisión hasta cierto intervalo y todos los valores de la magnitud examinada, la diferencia entre los cuales es menor que este intervalo, se consideran como coincidentes. Por eso, desde el punto de vista práctico, la función aleatoria puede ser considerada como un ruido blanco siempre que la correlación entre sus valores se haga extensiva solamente a los intervalos de variación del argumento que son menores que el intervalo mínimo perceptible a la precisión de mediciones adoptada. Con otras palabras, la función aleatoria puede considerarse como un ruido blanco si el intervalo de correlación de la misma es menor que el intervalo mínimo perceptible. Con ello, se llama *intervalo de correlación* a tal intervalo mínimo que los valores de la función aleatoria divididos por cualquier intervalo más grande se puedan considerar prácticamente no correlacionados. Esta definición muestra que la noción de intervalo de correlación es puramente práctica y no es un concepto matemático riguroso. Por eso para una misma función aleatoria el intervalo de correlación tendrá diferentes valores en dependencia de cuáles sean los valores del coeficiente de correlación que vamos a considerar despreciablemente pequeños.

Supongamos que una función aleatoria estacionaria con función correlativa $k_x(\tau)$ puede ser considerada prácticamente como ruido blanco. Surge la pregunta: ¿cómo determinar la intensidad de este ruido blanco? Para responder a esta pregunta, observamos que para un ruido blanco perfecto, en virtud de (5.4.3), la intensidad se determina por la fórmula

$$\nu = \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, d\tau. \tag{5.4.5}$$

Por esta misma fórmula se determina naturalmente también la intensidad de un ruido blanco real con función correlativa $k_x(\tau)$ distinta de la función delta. En virtud de (5.3.11) la integral en el miembro derecho de la fórmula (5.4.5) puede ser expresada por medio del valor de la densidad espectral para $\tau = 0$. Como resultado la fórmula (5.4.5) tomará la forma

$$\nu = 2\pi s_x(0). \tag{5.4.6}$$

Es obvio que una función aleatoria estacionaria cuyas función correlativa y densidad espectral se determinan por las fórmulas

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}, \quad s_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \tag{5.4.7}$$

prácticamente puede ser considerada como ruido blanco (ruido blanco real) siempre que α sea suficientemente grande. En efecto, cuando α es suficientemente grande, el valor de la función correlativa exponencial será tan pequeño como se quiera para $\tau \neq 0$ cualquiera. Por eso, cuando α es lo bastante grande, el intervalo de correlación de

esta función aleatoria será tan pequeño como se quiera. Con ello, su densidad espectral será prácticamente constante en una gama considerable de frecuencias. Es evidente que la gama de frecuencias en la cual la densidad espectral (5.4.7) puede considerarse prácticamente constante puede ser hecha tan grande como se quiera eligiendo α suficientemente grande. En virtud de (5.4.6), la intensidad de este ruido blanco real es igual a $2D/\alpha$, es decir, a la dispersión del mismo multiplicada por $2/\alpha$.

Ahora bien, la densidad espectral de cualquier ruido blanco estacionario real no es constante, pero puede considerarse prácticamente constante en cierto intervalo de frecuencias fuera del cual ella tiende a cero.

Ejemplo 5.4.1. En el ejemplo 4.2.7. fue mostrado que la función correlativa de la corriente que pasa por el circuito compuesto de un condensador de capacidad C, cargado por el flujo de partículas cargadas, y de una resistencia R es función exponencial de la diferencia de los argumentos [fórmula (4.2.43)]. Examinemos un caso particular en que la media de la carga de cada partícula q es igual a cero. En este caso la función correlativa de la corriente que pasa por el circuito se determina por la fórmula

$$k_i(\tau) = \frac{\mu D}{2T} e^{-\frac{|\tau|}{T}},$$

donde $T = RC$ es la constante del tiempo del circuito y μ es la densidad media del flujo de partículas que van a parar al condensador (la esperanza matemática del número de partículas en la unidad de tiempo). Supongamos que la densidad media del flujo de partículas μ crece ilimitadamente, mientras que la magnitud de carga de cada partícula va disminuyendo de modo que el producto μD quede constante, igual a ν. En este caso

$$k_i(\tau) = \frac{\nu}{2T} e^{-\frac{|\tau|}{T}}.$$

Cuando $T \to 0$ esta función tiende a cero para cualquier $\tau \neq 0$ y $k_i(0) \to \infty$. La integral de esta función, en los límites infinitos, queda en este caso constante, igual a ν. Así, para pequeños valores de la constante de tiempo T, la corriente que pasa por el circuito es próxima al ruido blanco con intensidad ν. En el límite para $T = 0$, la corriente en el circuito representa un ruido blanco estacionario perfecto. Así pues, el ruido blanco perfecto se puede representar físicamente como una sucesión continua de impulsos infinitesimales no correlacionados que siguen uno tras otro con densidad media infinita.

Observamos que en el ejemplo examinado el ruido blanco perfecto se obtiene solamente cuando $T = 0$, es decir, durante la descarga del condensador, que va cargado por el flujo de partículas, a través de una resistencia nula. Puesto que en la naturaleza no existe la resistencia igual a cero, se puede hablar solamente de una resistencia muy pequeña. Esto ilustra el hecho de que no existe un ruido blanco perfecto, sino que existen solamente funciones aleatorias próximas al ruido blanco.

Para reflejar la limitación de la gama de frecuencias en la cual la densidad espectral es constante, se introduce generalmente la noción de ruido blanco de banda. Se denomina *ruido blanco de banda* a una función aleatoria estacionaria cuya densidad espectral es cons-

tante en cierta gama de frecuencias y es igual a cero fuera de esta gama:

$$s_x(\omega) = \begin{cases} s_0 & \text{si} \quad |\omega| \leqslant \omega_0, \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| > \omega_0. \end{cases} \tag{5.4.8}$$

Sustituyendo esta expresión de la densidad espectral en la fórmula (5.3.15), hallamos la función correlativa del ruido blanco de banda:

$$k_x(\tau) = s_0 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega\tau}\, d\omega = s_0\, \frac{e^{i\omega_0\tau} - e^{-i\omega_0\tau}}{i\tau},$$

o bien

$$k_x(\tau) = \frac{2s_0}{\tau} \operatorname{sen} \omega_0\tau. \tag{5.4.9}$$

Sustituyendo la expresión (5.4.8) de la densidad espectral en la fórmula (5.3.16), hallaremos la dispersión del ruido blanco de banda:

$$D_x = k_x(0) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} s_0\, d\omega = 2s_0\omega_0. \tag{5.4.10}$$

Así pues, la dispersión del ruido blanco de banda es finita. Desde este punto de vista él es más real que el ruido blanco perfecto. Sin embargo, tampoco los ruidos blancos de banda existen en la naturaleza, puesto que no es posible una variación discontinua de la densidad espectral hasta el cero con el valor dado ω_0 de la frecuencia.

La fórmula (5.4.9) muestra que los valores del ruido blanco de banda en los puntos, divididos por cualesquiera intervalos múltiples de π/ω_0, no están correlacionados. Así, los términos de toda secuencia aleatoria formada por los valores del ruido blanco de banda en los puntos equidistantes, divididos por el intervalo π/ω_0, no están correlacionados. Con otras palabras, la secuencia aleatoria de los valores de un ruido blanco de banda, tomados cada intervalo π/ω_0, se puede considerar como *ruido blanco discreto*, es decir, como sucesión de impulsos aleatorios no correlacionados. Por eso el ruido blanco de banda desempeña el mismo papel en la teoría de secuencias aleatorias que el ruido perfecto en la teoría de procesos aleatorios del argumento que varía continuamente.

§ 5.5. Funciones aleatorias estacionarias ergódicas

Para determinar la esperanza matemática de una función aleatoria es necesario conocer su densidad unidimensional de probabilidad. En el caso en que las craracterísticas probabilísticas de la función aleatoria no son conocidas, entonces, para la determinación experimental de su esperanza matemática, hay que observar un número suficientemente grande de sus realizaciones para cada valor dado del argumento t. Entonces, conforme a los resultados del ejem-

plo 3.9.2, la media aritmética de la función aleatoria para cada valor de t, tomada según todas las realizaciones observadas, puede considerarse como valor de su esperanza matemática para esta t. Con otras palabras, para la determinación experimental de la esperanza matemática de una función aleatoria, se necesita obtener un número bastante grande de sus realizaciones y tomar el valor medio de estas realizaciones para cada valor dado del argumento t. Pero la esperanza matemática de una función aleatoria estacionaria es constante. Por eso cabe preguntar: ¿se podría utilizar para la determinación experimental de la esperanza matemática de una función aleatoria estacionaria los valores de una realización suya para diferentes valores del argumento en vez de los valores de un gran número de diferentes realizaciones para un mismo valor del argumento? Y en general ¿se podría aprovechar la circunstancia de que las características probabilísticas de las funciones aleatorias estacionarias no cambian, cualesquiera que sean los decalajes en tiempo (o en general a lo largo del eje del argumento), y determinar las características probabilísticas de la función aleatoria estacionaria por una realización suya, desplazándola por el eje del argumento mediante todos los procedimientos posibles? Para resolver esta cuestión, pongamos en claro cuáles son las condiciones en que una sola realización de la función aleatoria estacionaria, desplazada por el eje del argumento mediante todos los métodos posibles, puede sustituir una gran cantidad de realizaciones que se observan al tener el argumento un solo valor fijo.

Más exactamente, hallemos las condiciones en que la esperanza matemática de una función aleatoria estacionaria puede ser determinada como valor medio en tiempo de las ordenadas de una realización suya tomada arbitrariamente. Con otras palabras, determinemos cuáles son las condiciones en que para cualquier realización $x(t)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ tiene lugar la igualdad aproximada

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt. \tag{5.5.1}$$

Es obvio que la integral del segundo miembro de esta fórmula tiene diferentes valores para distintas realizaciones posibles de la función aleatoria $X(t)$. Por eso los valores del segundo miembro de la fórmula (5.5.1), correspondientes a distintas realizaciones posibles de la función aleatoria $X(t)$, son valores posibles de la magnitud aleatoria

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t)\, dt. \tag{5.5.2}$$

La esperanza matemática de esta magnitud aleatoria es, evidentemente, igual a m_x puesto que la esperanza matemática de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ es constante e igual a m_x. Por eso, para que se pueda escribir la igualdad aproximada (5.5.1), es necesaria y suficiente la pequeñez de la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T. En virtud de la fórmula (4.7.5) para la dispersión de la integral de la función aleatoria, la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T se expresa por la fórmula

$$D[Y_T] = M\left[\left\{\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt - m_x\right\}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T k_x(t-t')\,dt\,dt'. \quad (5.5.3)$$

Esta fórmula muestra que la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T y, por lo tanto, el error cuadrático medio de la igualdad aproximada (5.5.1), se puede hacer tan pequeña como se quiera eligiendo un valor de T bastante grande, siempre que el valor medio de la función correlativa en el cuadrado con el lado T tienda a cero al aumentar ilimitadamente el lado de este cuadrado. La condición suficiente para esto es la existencia de un tal valor τ_0 que la función correlativa $k_x(\tau)$ pueda ser considerada prácticamente igual a cero para $|\tau| > \tau_0$. Con otras palabras, para que la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T tienda a cero cuando $T \to \infty$, es suficiente que exista el intervalo finito de correlación de la función aleatoria estacionaria $X(t)$.

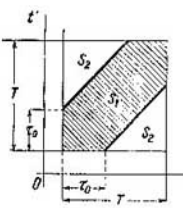


Fig. 5.5.1.

Para demostrar la afirmación expuesta, supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\tau_0 > 0$ que

$$|k_x(\tau)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |\tau| > \tau_0. \quad (5.5.4)$$

Dividamos el cuadrado $0 < t, t' < T$ en tres zonas con ayuda de las rectas $t - t' = \pm\tau_0$. (En la zona S_1, sombreada en la fig. 5.5.1, la función correlativa no sobrepasa su valor en la diagonal $k_x(0) = D_x$ y en las dos zonas restantes, señaladas en la fig. 5.5.1 por la letra S_2, la función correlativa es menor que ε. Por consiguiente,

$$\int_0^T\int_0^T k_x(t-t')\,dt\,dt' < D_x \text{ área } S_1 + \varepsilon \text{ área } S_2. \quad (5.5.5)$$

Pero el área de la zona S_1 es menor que $T\sqrt{2}\cdot\tau_0\sqrt{2} = 2T\tau_0$ y el área sumaria de las zonas señaladas por la letra S_2 es menor que el

área del cuadrado T^2. Por lo tanto,

$$\int_0^T \int_0^T k_x(t-t')\,dt\,dt' < 2D_x T\tau_0 + \varepsilon T^2$$

y

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T \int_0^T k_x(t-t')\,dt\,dt' < \frac{2D_x\tau_0}{T} + \varepsilon. \qquad (5.5.6)$$

Debido a la pequeñez arbitraria de ε, el segundo miembro de esta desigualdad se puede hacer tan pequeño como se quiera eligiendo un T suficientemente grande. Ahora bien, de (5.5.3) y (5.5.6) se deriva que la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T tiende a cero para $T \to \infty$ si la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ tiende a cero para $\tau \to \infty$.

Las funciones aleatorias estacionarias para las cuales la toma de un valor medio probabilístico por una numerosidad de todas las realizaciones posibles se puede sustituir, al calcular las esperanzas matemáticas, por la toma de un valor medio simple del tiempo de una sola realización tomada arbitrariamente, se denominan *ergódicas*. En dependencia de cuáles son las magnitudes, ligadas con la función aleatoria en cuestión, cuyas esperanzas matemáticas se puede calcular a base de una sola realización suya (cualquiera) tomando un valor medio del argumento, se puede hablar de diferente grado de ergodicidad. En particular, acabamos de demostrar que la tendencia de la función correlativa $k_x(\tau)$ a cero para $\tau \to \infty$ es una condición suficiente de ergodicidad de la función aleatoria estacionaria con respecto a la esperanza matemática.

La desigualdad (5.5.6) muestra que la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T depende de la relación entre la longitud de registro T de la realización de la función aleatoria $X(t)$ y el intervalo de correlación $2\tau_0$ de la misma. Así pues, para poder escribir la igualdad aproximada (5.5.1) es necesario que la longitud de registro T de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ sea lo suficientemente grande en comparación con su intervalo de correlación. Hablando metafóricamente, se puede decir que la igualdad (5.5.1) es válida si el intervalo de registro T de la función aleatoria $X(t)$ es lo suficientemente grande para que se manifieste bien su carácter aleatorio.

Ejemplo 5.5.1. ¿Cuál longitud de registro de la función aleatoria estacionaria $X(t)$, que tiene la función correlativa $De^{-\alpha|\tau|}$ debe tomarse para determinar su esperanza matemática por la fórmula (5.5.1) con un error cuadrático medio que no supere a $\sqrt{D}/10$?

Según los datos, la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T no debe superar en este caso a $D/100$. Por eso elegimos $\varepsilon = D/200$ y hallamos τ_0 partiendo de la condición

$$De^{-\alpha\tau_0} = \frac{D}{200}.$$

Obtenemos $\tau_0 \approx 5{,}3/\alpha$. Para que el primer sumando del segundo miembro de la desigualdad (5.5.6) no supere a $D/200$, es suficiente elegir la longitud de registro T, partiendo de la condición

$$\frac{2D\tau_0}{T} = \frac{D}{200}.$$

De aquí hallamos $T/\tau_0 = 400$ o $T \approx 2120/\alpha$. De este modo, para que el error cuadrático medio, al determinar la esperanza matemática de la función aleatoria por la fórmula (5.5.1), no exceda el 10% con respecto a la desviación cuadrática media de la función aleatoria, en este caso es suficiente registrar la realización de la función aleatoria en el intervalo T 200 veces mayor que el intervalo de correlación $2\tau_0$.

El valor de la función correlativa $k_x(\tau_0)$ de la función aleatoria estacionaria para cualquier τ_0 es la esperanza matemática de la función aleatoria $Z(t) = X^0(t)\ X^0(t + \tau_0)$:

$$k_x(\tau_0) = MX^0[(t)\ X^0(t + \tau_0)] = M[Z(t)]. \qquad (5.5.7)$$

Por eso en ciertas condiciones la función correlativa de una función aleatoria estacionaria también puede determinarse a base de una sola realización de esta función aleatoria tomando su valor medio referente al tiempo. Esto es posible si la función aleatoria $Z(t)$ es ergódica con respecto a la esperanza matemática. La condición suficiente de su ergodicidad es la tendencia a cero de su función correlativa $k_z(\tau)$ para $|\tau| \to \infty$ que se determina, evidentemente, por el momento de cuarto orden de la función aleatoria $X(t)$. Calculemos la función correlativa de la función aleatoria $Z(t)$ para el caso cuando la función aleatoria estacionaria $X(t)$ está repartida normalmente. Para esto hallemos primeramente el momento inicial de segundo orden de la función aleatoria $Z(t)$:

$$\Gamma_z(t, t + \tau) = M[Z(t)\ Z(t + \tau)] =$$
$$= M[X^0(t)\ X^0(t + \tau_0)\ X^0(t + \tau)\ X^0(t + \tau_0 + \tau)].$$

Así pues, el momento inicial de segundo orden de la función aleatoria $Z(t)$ representa el momento central de cuarto orden de los valores de la función aleatoria $X(t)$ para los valores del argumento t, $t + \tau_0$, $t + \tau$, $t + \tau_0 + \tau$. Expresando este momento mediante la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ por la fórmula (3.11.34), obtendremos

$$\Gamma_z(t,\ t + \tau) = k_x^2(\tau_0) + k_x^2(\tau) + k_x(\tau + \tau_0)\ k_x(\tau - \tau_0).$$

Aplicando la fórmula (4.2.12) que liga la función correlativa de una función aleatoria con la esperanza matemática de la misma y con el momento de segundo orden, y teniendo en cuenta que la esperanza matemática de la función aleatoria $Z(t)$ es igual a $k_x(\tau_0)$, hallamos la función correlativa de la función aleatoria $Z(t)$:

$$k_z(\tau) = \Gamma_z(t,\ t + \tau) - k_x^2(\tau_0) = k_x^2(\tau) + k_x(\tau + \tau_0)\ k_x(\tau - \tau_0). \quad (5.5.8)$$

De aquí se ve que la condición $k_x(\tau) \to 0$ para $|\tau| \to \infty$ es suficiente para la ergodicidad de la función aleatoria $Z(t)$ con respecto a la esperanza matemática y para la ergodicidad de la función aleatoria $X(t)$ con respecto a la función correlativa.

Así pues, el decrecimiento ilimitado de la función correlativa de una función aleatoria estacionaria normalmente repartida para $|\tau| \to \infty$, es la condición suficiente de su ergodicidad tanto con respecto a la esperanza matemática como con respecto a la función correlativa. Al cumplir esta condición, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria $X(t)$ normalmente repartida, cuando el valor de T es lo suficientemente grande, puede ser determinada aproximadamente por la fórmula

$$k_x(\tau_0) \approx \frac{1}{T}\int_0^T x^0(t)\, x^0(t+\tau_0)\, dt = \\ = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m_x]\,[x(t+\tau_0) - m_x]\, dt. \quad (5.5.9)$$

Ejemplo 5.5.2. Las funciones aleatorias estacionarias normalmente repartidas, con las tres funciones correlativas tipo examinadas en los párrafos anteriores, que contienen como multiplicador una función exponencial, son ergódicas tanto con respecto a la esperanza matemática como con respecto a la función correlativa, puesto que todas estas funciones correlativas tienden a cero cuando $|\tau| \to \infty$. Por eso las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas de las mismas se pueden determinar por las fórmulas (5.5.1) y (5.5.9) para un valor de T lo suficientemente grande.

Ejemplo 5.5.3. Para una función aleatoria estacionaria sinusoidal de frecuencia determinada $X(t) = U \operatorname{sen} \omega_0 t + Z \cos \omega_0 t$, $M[U] = M[Z] = 0$, $D[U] = D[Z] = D$, no se cumple la condición suficiente de ergodicidad, puesto que su función correlativa $k_x(\tau) = D \cos \omega_0 \tau$ no tiende a cero cuando $|\tau| \to \infty$. Para establecer si ésta es ergódica o no, calculemos para ella los segundos miembros de las fórmulas (5.5.1) y (5.5.9). Obtendremos

$$M_x^* = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T (U \operatorname{sen} \omega_0 t + Z \cos \omega_0 t)\, dt = \\ = \frac{1}{T\omega_0}[U(1 - \cos \omega_0 T) + Z \operatorname{sen} \omega_0 T].$$

De aquí se ve que el segundo miembro de la fórmula (5.5.1) tiende en este caso a cero, es decir, a la esperanza matemática de la función aleatoria para $T \to \infty$. Por lo tanto, la función aleatoria estacionaria sinusoidal es ergódica con respecto a la esperanza matemática. De un modo semejante hallamos

$$K_x^*(\tau_0) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\, X(t+\tau_0)\, dt \approx \frac{U^2 + Z^2}{2} \cos \omega_0 \tau_0$$

para grandes valores de T. De aquí se ve que el segundo miembro de la fórmula (5.5.9) es aproximadamente proporcional al cuadrado de la amplitud aleatoria $A^2 = U^2 + Z^2$ de la sinusoide y por eso tiene diferentes valores para distintas

realizaciones. Por consiguiente, la función aleatoria estacionaria sinusoidal no es ergódica con respecto a la función correlativa. Para confirmar esta deducción, calculemos además la dispersión de la magnitud aleatoria $K_x^*(\tau_0)$ suponiendo que las magnitudes aleatorias U y Z están repartidas normalmente. Teniendo en cuenta que su esperanza matemática es igual a la función correlativa $k_x(\tau_0) = D\cos\omega_0\tau_0$, obtendremos

$$D[K_x^*(\tau_0)] \approx M\left[\left(\frac{U^2+Z^2}{2}\cos\omega_0\tau_0 - D\cos\omega_0\tau_0\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\frac{U^4+2U^2Z^2+Z^4}{4} - D(U^2+Z^2) + D^2\right]\cos^2\omega_0\tau_0.$$

Pero para las magnitudes aleatorias normalmente repartidas el momento central de cuarto orden es igual al cuadrado triplicado de la dispersión [véase la fórmula (2.5.11)]. Por eso $M[U^4] = M[Z^4] = 3D^2$ y obtendremos

$$D[K_x^*(\tau_0)] \approx D^2\cos^2\omega_0\tau_0.$$

Ejemplo 5.5.4. Cualquier función aleatoria estacionaria con realizaciones puramente sinusoidales no es ergódica con respecto a la función correlativa incluso si su función correlativa tiende a cero cuando $|\tau| \to \infty$. En efecto, si la función aleatoria estacionaria $X(t)$ se determina por la fórmula

$$X(t) = m_x + U\operatorname{sen}\Omega t + Z\cos\Omega t,$$

donde U y Z son magnitudes aleatorias no correlacionadas, con esperanzas matemáticas iguales a cero y dispersiones iguales a D, y Ω es cualquier magnitud aleatoria no negativa, independiente de las magnitudes U, Z, entonces, conforme a los resultados del ejemplo anterior

$$M_x^* = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt \approx m_x,$$

$$K_x^*(\tau_0) = \frac{1}{T}\int_0^T X^0(t)\,X^0(t+\tau_0)\,dt \approx \frac{U^2+Z^2}{2}\cos\Omega\tau_0$$

para grandes valores de T. La primera fórmula muestra que la función aleatoria con realizaciones puramente sinusoidales es ergódica con respecto a la esperanza matemática. La segunda fórmula muestra que el segundo miembro de la fórmula (5.5.9) tiende a diferentes límites para distintas realizaciones cuando $T \to \infty$ y no tiende, para ninguna realización, a la función correlativa.

Los ejemplos examinados muestran que ninguna función aleatoria estacionaria, todas las posibles realizaciones de la cual son sinusoides, puede ser ergódica con respecto a la función correlativa y, por consiguiente, su función correlativa no puede ser calculada con ayuda de una sola realización. En el § 5.2. vimos que, cualquiera que sea la función correlativa $k_x(\tau)$, siempre existen funciones aleatorias estacionarias, con realizaciones puramente sinusoideales, que tienen esta función correlativa. Por eso a toda función correlativa $k_x(\tau)$ le corresponden siempre funciones aleatorias estacionarias tanto ergódicas como no ergódicas con respecto a la función correlativa. Por lo tanto, conociendo solamente la función correlativa de una función

aleatoria estacionaria, no se puede determinar si es ella ergódica con respecto a la función correlativa o no. Para resolver esta cuestión, siempre se necesita disponer de una información adicional acerca de las características estadísticas de la función aleatoria estacionaria, por ejemplo, conocer que la función aleatoria está repartida normalmente. Como vimos, si se trata de funciones aleatorias estacionarias normalmente repartidas, basta conocer la función correlativa para resolver la cuestión acerca de la ergodicidad *).

Hemos visto que para una función aleatoria estacionaria, ergódica con respecto a la esperanza matemática y la función correlativa, la esperanza matemática y la función correlativa pueden ser calculadas, por una cualquiera de sus realizaciones, por las fórmulas (5.5.1) y (5.5.9), con ello, la fluctuación de los resultados de los cálculos para distintas realizaciones tiende a cero al aumentar ilimitadamente la longitud de las realizaciones T. Esto da razón para sustituir en las fórmulas (5.5.1) y (5.5.9) la realización de la función aleatoria por la propia función aleatoria y, pasando al límite, escribir las igualdades exactas

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)\, dt, \tag{5.5.10}$$

$$k_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X^0(t)\, X^0(t+\tau)\, dt. \tag{5.5.11}$$

En estas fórmulas el límite debe entenderse en el sentido probabilístico, es decir, en el sentido de que la esperanza matemática del cuadrado de la diferencia entre la magnitud y su límite tiende a cero (el así llamado *límite en la media cuadrática*). Poniendo en la fórmula (5.5.11) $\tau = 0$, obtendremos la siguiente fórmula para la dispersión de una función aleatoria estacionaria, ergódica con respecto a la función correlativa:

$$D_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [X^0(t)]^2\, dt. \tag{5.5.12}$$

Expongamos ahora la interpretación física de la noción de densidad espectral de una función aleatoria estacionaria. Para esto examinemos la función aleatoria estacionaria $X(t)$ ergódica (con respecto a la función correlativa).

En los problemas prácticos la función aleatoria $X(t)$ representa frecuentemente la corriente o la tensión existente en cierto circuito.

*) Vimos que siempre basta conocer la función correlativa para juzgar acerca de la ergodicidad de la función aleatoria estacionaria con respecto a la esperanza matemática. De aquí se puede deducir que para juzgar sobre la ergodicidad de una función aleatoria estacionaria con respecto a la función correlativa es suficiente conocer el momento de cuarto orden de esta función aleatoria.

Con ello, la esperanza matemática m_x es la componente constante de corriente o de tensión, mientras que la función aleatoria centrada $X^0(t)$ representa las fluctuaciones de la corriente o de la tensión. La magnitud $[X^0(t)]^2$ es la potencia instantánea de la corriente de fluctuación, en la resistencia unitaria y la magnitud

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T [X^0(t)]^2 \, dt \tag{5.5.13}$$

es la potencia media de la corriente de fluctuación en la resistencia unitaria. Pero conforme a la fórmula (5.5.12) la magnitud W para la función aleatoria estacionaria ergódica $X(t)$ no difiere prácticamente de la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ para T lo suficientemente grande, debido a lo cual se puede escribir

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T [X^0(t)]^2 \, dt \approx D_x \tag{5.5.14}$$

o bien, teniendo en cuenta (5.3.16)

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T [X^0(t)]^2 \, dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \, d\omega. \tag{5.5.15}$$

Esta fórmula muestra que la densidad espectral $s_x(\omega)$ caracteriza en este caso la distribución de la potencia media de las fluctuaciones de la corriente en el espectro de frecuencias. Debido a este sentido físico de la densidad espectral, a ésta se le llama con frecuencia *densidad espectral de potencia* de una función aleatoria estacionaria.

La fórmula (5.5.15) muestra que las fluctuaciones de corriente pueden tener una densidad espectral constante solamente en aquel caso cuando la potencia media de estas fluctuaciones es infinita. Esto confirma la deducción hecha en el párrafo precedente de que el ruido blanco no puede existir físicamente.

§ 5.6. Densidad espectral recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias y enlazadas estacionariamente

Hallemos la función correlativa recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias $X(t)$ e $Y(t)$. Para esto representémoslas por las descomposiciones espectrales en forma compleja:

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) \, e^{i\omega t} \, d\omega, \tag{5.6.1}$$

$$Y(t) = m_y + \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \, e^{i\omega t} \, d\omega, \tag{5.6.2}$$

donde $V(\omega)$ y $W(\omega)$ son dos ruidos blancos complejos cuyas intensidades son iguales a las densidades espectrales $s_x(\omega)$ y $s_y(\omega)$ de las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ respectivamente. Para determinar la función correlativa recíproca, hallamos las correspondientes funciones aleatorias centrales. Con ello, teniendo en cuenta la determinación de la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias complejas, pasemos en la expresión (5.6.2) de la función aleatoria real $Y(t)$ a las magnitudes conjugadas complejas y cambiemos la designación del argumento y de la variable de integración. Entonces obtendremos:

$$X^0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad \overline{Y^0(t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W(\omega')}\, e^{-i\omega t'}\, d\omega'.$$

De aquí hallamos

$$k_{xy}(t, t') = M[X^0(t)\,\overline{Y^0(t')}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M[V(\omega)\,\overline{W(\omega')}]\, e^{i(\omega t - \omega' t')}\, d\omega\, d\omega'.$$

Pero la esperanza matemática bajo el signo integral representa la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(\omega)$ y $W(\omega)$:

$$M[V(\omega)\,\overline{W(\omega')}] = K_{vw}(\omega, \omega').$$

Por consiguiente, la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ se expresa por medio de la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(\omega)$ y $W(\omega)$ por la fórmula

$$K_{xy}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{vw}(\omega, \omega')\, e^{i(\omega t - \omega' t')}\, d\omega\, d\omega'. \qquad (5.6.3)$$

Esta fórmula muestra que en el caso general las funciones aleatorias estacionarias, pueden estar ligadas no estacionariamente, puesto que su función correlativa recíproca depende de dos argumentos por separado. Para que las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ estén ligadas estacionariamente, es necesario que sea $K_{vw}(\omega, \omega') = 0$ para $\omega' \neq \omega$; es decir, que los valores de los ruidos blancos $V(\omega)$ y $W(\omega)$, siendo diferentes los valores de la frecuencia ω, estén no correlacionados. En este caso la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(\omega)$ y $W(\omega)$ debe contener como multiplicador la función delta:

$$K_{vw}(\omega, \omega') = s_{xy}(\omega)\delta(\omega - \omega'). \qquad (5.6.4)$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (5.6.3) y tomando en consideración las propiedades de las funciones delta, obtendremos

$$K_{xy}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega)\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t - \omega' t')} \delta(\omega - \omega')\, d\omega' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}\, d\omega.$$

De aquí se ve que en el caso en que la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(F)$ y $W(\omega)$ se expresa por la fórmula (5.6.4), las funciones aleatorias estacionarias $X(t)$ e $Y(t)$ están ligadas estacionariamente y su función correlativa recíproca se determina por la fórmula

$$k_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (5.6.5)$$

La fórmula (5.6.5) es completamente análoga a la (5.3.15) que expresa la función correlativa de una función aleatoria estacionaria por medio de su densidad espectral. Esto da razón para llamar a la función $s_{xy}(\omega)$ *densidad espectral recíproca* de dos funciones aleatorias estacionarias y enlazadas estacionariamente $X(t)$ e $Y(t)$. Es obvio que la magnitud $s_{xy}(\omega)\, d\omega$ representa el momento de correlación de los armónicos $\dot{V}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$ y $W(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$ de una misma frecuencia ω que forman parte de las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$. Los armónicos de diferentes frecuencias en las funciones aleatorias ligadas estacionariamente siempre no están correlacionados; sólo los armónicos de la misma frecuencia pueden ser correlacionados. Ahora bien, la densidad espectral recíproca caracteriza la distribución del enlace correlativo entre las funciones aleatorias en el espectro de frecuencias.

La fórmula (5.6.5) muestra que la densidad espectral recíproca representa la transformación de Fourier de la función correlativa recíproca. Por eso, aplicando la fórmula de la transformación inversa de Fourier, obtendremos

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{xy}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \qquad (5.6.6)$$

Esta fórmula expresa la densidad espectral recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias y enlazadas estacionariamente mediante su función correlativa recíproca.

Ejemplo 5.6.1. Hallar la densidad espectral recíproca de las funciones aleatorias estacionarias y enlazadas estacionariamente $X(t)$ e $Y(t)$ cuya fun-

ción correlativa recíproca se determina por la fórmula

$$k_{xy}(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|} \operatorname{sen} \omega_0 \tau, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2.$$

Por la fórmula (5.6.6) hallamos

$$s_{xy}(\omega) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} \operatorname{sen} \omega_0 \tau \, d\tau =$$

$$= \frac{C}{4\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\tau + i\omega_0\tau - i\omega\tau} \, d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau + i\omega_0\tau - i\omega\tau} \, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\tau - i\omega_0\tau - i\omega\tau} \, d\tau - \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega_0\tau - i\omega\tau} \, d\tau \right]$$

o bien, después de cumplir la integración y transformaciones elementales

$$s_{xy}(\omega) = -\frac{2C}{\pi} \cdot \frac{i\alpha\omega\omega_0}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}.$$

Esta fórmula muestra que la densidad espectral recíproca de las funciones aleatorias reales puede ser compleja.

Ejemplo 5.6.2. Hallar la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias

$$Y(t) = X(t) + X_1(t), \qquad Z(t) = X(t) + X_2(t),$$

donde $X(t)$, $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son funciones aleatorias estacionarias no correlacionadas con las funciones correlativas $De^{-\alpha|\tau|}$, $D_1e^{-\alpha_1|\tau|}$ y $D_2e^{-\alpha_2|\tau|}$, respectivamente. Mostrar que las funciones aleatorias $Y(t)$ y $Z(t)$ están enlazadas estacionariamente y hallar su densidad espectral recíproca.

Según la definición de la función correlativa recíproca

$$K_{yz}(t, t') = M[Y^0(t) Z^0(t')] = M[X^0(t) X^0(t')] +$$
$$+ M[X_1^0(t) X^0(t')] + M[X^0(t) X_2^0(t')] + M[X_1^0(t) X_2^0(t')]$$

o bien, puesto que las funciones aleatorias $X(t)$, $X_1(t)$ y $X_2(t)$ no están correlacionadas,

$$K_{yz}(t, t') = M[X^0(t) X^0(t')] = k_x(t - t').$$

De aquí se ve que las funciones aleatorias $Y(t)$ y $Z(t)$ están enlazadas estacionariamente y su función correlativa recíproca coincide con la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$. Por lo tanto, la densidad espectral recíproca de las funciones aleatorias $Y(t)$ y $Z(t)$ también coincide con la densidad espectral de la función aleatoria $X(t)$:

$$s_{yz}(\omega) = s_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

§ 5.7. Secuencias aleatorias estacionarias

Examinemos la secuencia aleatoria formada por los valores de una función aleatoria estacionaria que corresponden a la secuencia ilimitada de los valores equidistantes del argumento con el intervalo Δ:

$$X_h = X(t_0 + h\Delta) \qquad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (5.7.1)$$

Esta secuencia aleatoria es estacionaria, puesto que su función correlativa depende solamente de la diferencia de los números de los términos de la secuencia:

$$k_m = M\,[X_h^0 X_{h+m}^h] = \\ = M\,[X^0(t_0+h\Delta)\,X^0(t_0+h\Delta+m\Delta)] = k_x(m\Delta). \quad (5.7.2)$$

Expresemos aquí la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ por la fórmula (5.3.15). Entonces, obtendremos

$$k_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\, e^{i\omega m\Delta}\, d\omega.$$

Dividamos el intervalo de integración en los segmentos de $2\pi/\Delta$ de longitud dispuestos simétricamente con respecto al origen de coordenadas. Entonces tendremos

$$k_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{(2\nu-1)\pi/\Delta}^{(2\nu+1)\pi/\Delta} s_x(\omega)\, e^{i\omega m\Delta}\, d\omega.$$

Sustituyendo las variables $\omega = 2\nu\pi/\Delta + \omega'$, en las integrales correspondientes, las reducimos todas a los mismos límites de integración:

$$k_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} s_x\left(\omega' + \frac{2\nu\pi}{\Delta}\right) e^{i\omega' m\Delta + 2\nu\pi i}\, d\omega'.$$

Omitiendo la raya adjunta a la designación de la variable de integración y teniendo en cuenta que $e^{2\pi i} = 1$, podemos escribir la fórmula obtenida en la forma

$$k_m = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega + \frac{2\nu\pi}{\Delta}\right)\right] e^{i\omega m\Delta}\, d\omega.$$

Por fin, introduciendo la designación

$$s_x^d(\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega + \frac{2\nu\pi}{\Delta}\right), \quad (5.7.3)$$

obtendremos

$$k_m = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} s_x^d(\omega)\, e^{i\omega m\Delta}\, d\omega. \quad (5.7.4)$$

En particular, poniendo $m = 0$, obtendremos la siguiente expresión para la dispersión de los términos de la secuencia aleatoria estacio-

naria

$$D_x = k_0 = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} s_x^d(\omega)\, d\omega. \tag{5.7.5}$$

Demostremos que la función $s_x^d(\omega)$ determinada por la fórmula (5.7.3) es periodica con un período de $2\pi/\Delta$. Para eso sustituyamos en la fórmula (5.7.3) ω por la magnitud $\omega + 2\pi/\Delta$. Entonces obtendremos

$$s_x^d\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega + \frac{2(\nu+1)\pi}{\Delta}\right).$$

Pongamos aquí $\mu = \nu + 1$ y observemos que μ, al igual que ν, recorre todos los valores enteros de $-\infty$ a ∞. Como resultado tendremos

$$s_x^d\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta}\right) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega + \frac{2\mu\pi}{\Delta}\right).$$

Comparando esta fórmula con (5.7.3) y teniendo en cuenta que la suma no depende de cómo está designado el índice de adición (éste recorre todos los valores enteros de $-\infty$ a ∞), obtendremos

$$s_x^d\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta}\right) = s_x^d(\omega). \tag{5.7.6}$$

lo que demuestra precisamente la afirmación enunciada.

La función periódica puede ser descompuesta en la serie de Fourier *). Por eso la función $s_x^d(\omega)$ también puede ser representada por una serie compleja de Fourier:

$$s_x^d(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{i\omega p\Delta}. \tag{5.7.7}$$

Los coeficientes de esta serie se determinan por la fórmula conocida de la Teoría de series de Fourier:

$$a_p = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} s_x^d(\omega)\, e^{-i\omega p\Delta}\, d\omega.$$

Comparando esta fórmula con la (5.7.4) para $m = -p$, vemos que los coeficientes de Fourier de la función $s_x^d(\omega)$ se expresan por medio de la función correlativa de la secuencia aleatoria:

$$a_p = \frac{\Delta}{2\pi} k_{-p}.$$

*) Para esto es suficiente que la función periódica sea continua o tenga un número finito de puntos de discontinuidad de primer género.

Sustituyendo esta expresión en (5.7.7), obtendremos

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_{-p} e^{i\omega p\Delta}.$$

Por fin, poniendo aquí $-p = m$ y teniendo en cuenta que m, al igual que p, recorre todos los valores enteros de $-\infty$ a ∞, obtendremos

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m e^{-i\omega m\Delta}. \tag{5.7.8}$$

Expresemos ahora la función aleatoria estacionaria $X(t)$ por la descomposición espectral (5.3.3). Entonces obtendremos la siguiente fórmula para los términos de la secuencia aleatoria estacionaria que se examina:

$$X(t_0 + t\Delta) = X_h = m_x + \int_{-\infty}^{+\infty} V_d(\omega)\, e^{i\omega(t_0 + h\Delta)}\, d\omega.$$

Cumpliendo aquí las mismas transformaciones que al deducir la fórmula (5.7.4), obtendremos

$$X_h = m_x + \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} V_d(\omega)\, e^{i\omega h\Delta}\, d\omega, \tag{5.7.9}$$

donde

$$V_d(\omega) = e^{i\omega t_0} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V\left(\omega + \frac{2\pi\nu}{\Delta}\right). \tag{5.7.10}$$

Así pues, hemos obtenido la representación espectral de una secuencia aleatoria estacionaria. Con ello, debido a la periodicidad de la función exponencial del argumento puramente imaginario, el espectro de frecuencias de la secuencia aleatoria se puede considerar concentrado en el intervalo $|\omega| < \pi/\Delta$. Las fórmulas (5.7.4) y (5.7.8) son análogas a las de Wiener-Jinchin (5.3.11) y (5.3.15).

Mostremos ahora que la función aleatoria $V_d(\omega)$ en la representación espectral de una secuencia aleatoria estacionaria no es más que un ruido blanco cuya intensidad es igual a $s_x^d(\omega)$. Para esto hallemos la función correlativa de la función aleatoria $V_d(\omega)$. Con ello, es suficiente considerarla solamente en el intervalo de frecuencias $|\omega| < \pi/\Delta$. Puesto que los sumandos en la suma que figura en (5.7.10) han sido obtenidos decalando el ruido blanco $\dot{V}(\omega)$ en intervalos múltiples del período $2\pi/\Delta$, todos ellos no están correlacionados en los límites de un período $|\omega| < \pi/\Delta$. Por eso la función correlativa de la suma en (5.7.10) es igual a la suma de las funciones correlativas de los sumandos. El multiplicador $e^{i\omega t_0}$ en (5.7.10)

dará el multiplicador $e^{i(\omega-\omega')t_0}$ en la expresión de la función correlativa de la función aleatoria $V_d(\omega)$. Por eso, teniendo en cuenta la fórmula (5.3.8) para la función correlativa del ruido blanco $V(\omega)$, obtendremos

$$K_{v_d}(\omega, \omega') = e^{i(\omega-\omega')t_0}\left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega+\frac{2\pi\nu}{\Delta}\right)\right]\delta(\omega-\omega').$$

Tomando en consideración que el segundo miembro de esta fórmula es igual a cero, siendo $\omega' \neq \omega$, podemos sustituir en el multiplicador, delante de la función delta, ω' por ω. Entonces, teniendo en cuenta la fórmula (5.7.3), obtendremos

$$K_{v_d}(\omega, \omega') = s_x^d(\omega)\,\delta(\omega-\omega'). \qquad (5.7.11)$$

Esta fórmula demuestra que la función aleatoria $V_d(\omega)$ en el intervalo $|\omega| < \pi/d$ representa un ruido blanco con intensidad $s_x^d(\omega)$.

La función $s_x^d(\omega)$ representa *la densidad espectral* de una secuencia aleatoria estacionaria. La magnitud $s_x^d(\omega)\,d\omega$ es igual a la dispersión de los armónicos $V_d(\omega)e^{i\omega h\Delta}\,d\omega$ y $V_d(-\omega)\,e^{-i\omega h\Delta}\,d\omega$ que forman parte de la descomposición espectral (5.7.9) de la secuencia aleatoria estacionaria.

Ejemplo 5.7.1. Hallar la densidad espectral de una secuencia aleatoria estacionaria con la función correlativa $k_m = Dq^{|m|}$, $0 < q < 1$.

Representemos previamente la fórmula (5.7.8) en la forma

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi}\left(k_0 + \sum_{m=-\infty}^{-1} k_m e^{-i\omega m\Delta} + \sum_{m=1}^{\infty} k_m e^{-i\omega m\Delta}\right).$$

Poniendo en la primera suma $-m = p$ y en la segunda, $m = p$ y teniendo en cuenta que $k_{-p} = k_p$, escribamos la fórmula obtenida en la forma

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi}\left(k_0 + \sum_{p=1}^{\infty} k_p e^{i\omega p\Delta} + \sum_{p=1}^{\infty} k_p e^{-i\omega p\Delta}\right). \qquad (5.7.12)$$

Sustituyendo aquí la expresión de la función correlativa, nos cercioramos de que ambas sumas representan en este caso progresiones geométricas. Sumándolas, obtendremos la siguiente expresión de la secuencia aleatoria estacionaria que se examina:

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta D}{2\pi}\left(1 + \frac{qe^{i\omega\Delta}}{1-qe^{i\omega\Delta}} + \frac{q}{e^{i\omega\Delta}-q}\right). \qquad (5.7.13)$$

Ejemplo 5.7.2. Hallar la densidad espectral de la secuencia aleatoria estacionaria formada por los valores de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ con la función correlativa $De^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$, tomados cada intervalo Δ.

La función correlativa de la secuencia en cuestión se determina por la fórmula

$$k_m = De^{-\alpha|m|\Delta}\cos\omega_0 m\Delta = \frac{D}{2}(q_1^{|m|} + q_2^{|m|}),$$

donde $q_1 = e^{-\alpha\Delta+i\omega_0\Delta}$, $q_2 = e^{-\alpha\Delta-i\omega_0\Delta}$. Sustituyendo la expresión obtenida de la función correlativa de la secuencia en la fórmula (5.7.12) y sumando las progresiones geométricas, hallaremos la densidad espectral:

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta D}{4\pi}\left(2 + \frac{q_1 e^{i\omega\Delta}}{1-q_1 e^{i\omega\Delta}} + \frac{q_1}{e^{i\omega\Delta}-q_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{q_2 e^{i\omega\Delta}}{1-q_2 e^{i\omega\Delta}} + \frac{q_2}{e^{i\omega\Delta}-q_2}\right). \quad (5.7.14$$

Le dejamos al lector que por sí mismo demuestre que en el caso de una función correlativa más general (5.3.24) la densidad espectral se expresará por la fórmula que se diferencia de (5.7.14) solamente por el multiplicador adicional $1 - i\gamma$ en los sumandos con q_1 y por el multiplicador adicional $1 + i\gamma$ en los sumandos con q_2.

Las fórmulas (5.7.13) y (5.7.14) muestran que para todas las funciones correlativas tipo de las funciones aleatorias estacionarias, las densidades espectrales de las secuencias aleatorias estacionarias correspondientes son funciones racionales de la magnitud $e^{i\omega\Delta}$. Esto da razón para introducir en las fórmulas (5.7.4) y (5.7.8) en vez de ω una nueva variable $z = e^{i\omega\Delta}$. Entonces, poniendo

$$\sigma_x^d(z) = \frac{1}{\Delta} s_x^d(\omega) = \frac{1}{\Delta} s_x^d\left(\frac{1}{i\Delta}\ln z\right) \quad (5.7.15)$$

y teniendo en cuenta que $dz = iz\,\Delta d\omega$, reduzcamos las fórmulas (5.7.4), (5.7.5) y (5.7.8) a la forma

$$k_m = \frac{1}{i}\int_{C_1} \sigma_x^d(z)\, z^{m-1}\, dz, \quad (5.7.16)$$

$$D_x = \int_{C_1} \sigma_x^d(z)\frac{dz}{iz}, \quad (5.7.17)$$

$$\sigma_x^d(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m z^{-m}, \quad (5.7.18)$$

donde la integración se efectúa por las circunferencia C_1 de radio unitario con centro en el origen de coordenadas en el plano de la variable compleja z. Esto se ve del hecho de que para todas las ω reales, la variable z es en módulo igual a la unidad y su argumento varía de $-\pi$ a π al variar ω de $-\pi/\Delta$ a π/Δ.

Las fórmulas (5.7.16), (5.7.17) y (5.7.18) se utilizan al llevar a cabo las investigaciones teóricas de la precisión de los sistemas automáticos discretos (de impulso); ellas no son cómodas para efectuar los cálculos prácticos.

Con el fin de reducir las integrales de las fórmulas (5.7.4) y (5.7.5) a las integrales de las funciones racionales fraccionarias en los límites infinitos de la forma (5.3.29), conviene introducir una nueva varia-

ble, poniendo

$$i\lambda = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{i\omega\Delta}-1}{e^{i\omega\Delta}+1} = i\,\mathrm{tg}\frac{\omega\Delta}{2}. \qquad (5.7.19)$$

De aquí se ve que para los valores reales de ω, la variable λ es real y varía monótonamente de $-\infty$ a $+\infty$ al variar ω de $-\pi/\Delta$ a π/Δ. Además, λ es función racional de z y, por lo tanto, para todas las funciones correlativas tipo y sus combinaciones lineales, las densidades espectrales de las secuencias aleatorias estacionarias correspondientes representan funciones racionales fraccionarias de λ. De (5.7.19) se puede expresar la variable z en función de λ:

$$z = e^{i\omega\Delta} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}. \qquad (5.7.20)$$

Derivando (5.7.19), hallamos

$$d\lambda = \frac{1}{\cos^2\frac{\omega\Delta}{2}}\,\frac{\Delta}{2}\,d\omega = \left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\omega\Delta}{2}\right)\frac{\Delta}{2}\,d\omega = \frac{\Delta}{2}(1+\lambda^2)\,d\omega,$$

de donde

$$\Delta\,d\omega = \frac{2\,d\lambda}{1+\lambda^2}. \qquad (5.7.21)$$

En virtud de las fórmulas (5.7.20) y (5.7.21), introduciendo la designación

$$\widetilde{s}_x(\lambda) = \frac{2}{\Delta}\,s_x^d\left(\frac{2}{\Delta}\,\mathrm{arctg}\,\lambda\right) = 2\sigma_x^d\left(\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}\right). \qquad (5.7.22)$$

podemos representar las fórmulas (5.7.4) y (5.7.5) en la forma

$$k_m = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{s}_x(\lambda)\left(\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}\right)^m \frac{d\lambda}{1+\lambda^2},$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{s}_x(\lambda)\,\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}. \qquad (5.7.23)$$

Esta integral se puede calcular por la fórmula (5.3.29). La fórmula para la función correlativa debe ser transformada, suprimiendo las magnitudes imaginarias en el denominador. Entonces obtendremos

$$k_m = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{s}_x(\lambda)\,\frac{(1+i\lambda)^{2m}}{(1+\lambda^2)^{m+1}}\,d\lambda$$

o bien, descomponiendo el numerador por la fórmula del binomio de Newton y teniendo en cuenta que la función $\widetilde{s}_x(\lambda)$ es par y que la integral de la función impar en los límites simétricos con respecto al origen de coordenadas es igual a cero,

$$k_m = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{s}_x(\lambda) \sum_{p=0}^{m} C_{2m}^{2p}\,(i\lambda)^{2p}\,\frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^{m+1}}. \qquad (5.7.24)$$

CAPITULO 6

Representaciones canónicas de las funciones aleatorias

§ 6.1. Tipos de representaciones canónicas

Para aplicar la Teoría de funciones aleatorias a los problemas prácticos, tienen gran importancia las expresiones de funciones aleatorias arbitrarias en función de objetos aleatorios más simples. Las magnitudes aleatorias escalares corrientes representan los objetos aleatorios más simples. En los §§ 3.8 y 3.9 vimos que las esperanzas matemáticas, las dispersiones y los momentos de correlación de las funciones lineales de una cantidad cualquiera de magnitudes aleatorias se calculan muy sencillamente. Con ello, las fórmulas para las dispersiones y los momentos de correlación se simplifican considerablemente, si las magnitudes aleatorias de partida no están correlacionadas. Así, por ejemplo, para determinar la dispersión de la función lineal de diez magnitudes aleatorias debemos, en el caso general, calcular 100 sumandos, mientras que en caso de magnitudes no correlacionadas, es necesario calcular solamente 10 sumandos. Esta ventaja de las magnitudes no correlacionadas crece rápidamente al aumentar el número de las mismas. Por eso, naturalmente, surge la idea de procurar representar la función aleatoria arbitraria $X(t)$ en la forma

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu x_\nu(t), \qquad (6.1.1)$$

donde $V_1, V_2, \ldots$ son magnitudes aleatorias no correlacionadas cuya esperanzas matemáticas son iguales a cero. Los coeficientes adjuntos a las magnitudes aleatorias V_ν dependen, evidentemente, de la variable t, es decir, son funciones (no aleatorias) de la variable t. A toda representación de una función aleatoria en forma de una combinación lineal de magnitudes aleatorias no correlacionadas la llamaremos *descomposición canónica* de la misma. A las funciones aleatorias V_ν las denominaremos *coeficientes aleatorios* de la descomposición canónica y a las funciones $x_\nu(t)$, *funciones coordenadas*.

Expresando la función aleatoria $X(t)$ por la descomposición canónica, se puede hallar también la descomposición correspondiente para su función correlativa. Para ello pongamos en (6.1.1) $t = t'$:

$$X(t') = m_x(t') + \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu x_\nu(t'). \qquad (6.1.2)$$

Para cualesquiera valores fijos de t y t', las magnitudes $X(t)$ y $X(t')$ determinadas por las fórmulas (6.1.1) y (6.1.2) representan las funciones lineales de unas mismas magnitudes aleatorias no correlacionadas V_ν. Por lo tanto, el momento de correlación de las magnitudes aleatorias $X(t)$ y $X(t')$ para cualesquiera valores fijos de t y t' se puede calcular por la fórmula (3.9.8). Como resultado obtendremos para la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ la fórmula

$$K_x(t, t') = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu x_\nu(t)\,\overline{x_\nu(t')}, \tag{6.1.3}$$

donde D_ν son las dispersiones de las magnitudes aleatorias V_ν. Al deducir la fórmula (6.1.3), admitimos que en el caso general los coeficientes de la descomposición canónica V_ν y las funciones coordenadas $x_\nu(t)$ pueden ser complejos, puesto que en los problemas prácticos conviene frecuentemente representar las funciones reales por series con términos complejos. A título de ejemplo puede servir la descomposición de la función real en la serie de Fourier con términos complejos.

A toda descomposición de la función correlativa de la forma (6.1.3) la llamaremos *descomposición canónica* de la misma.

Poniendo en la fórmula (6.1.3) $t' = t$, obtendremos la descomposición correspondiente para la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu |x_\nu(t)|^2. \tag{6.1.4}$$

El ruido blanco representa el tipo más simple de una función aleatoria. Por eso se puede suponer que muchas operaciones sobre una función aleatoria arbitraria se harán más simples, si esta función aleatoria se expresa en función del ruido blanco. En el ejemplo 5.4.1 vimos que el ruido blanco se puede representar en forma de una secuencia continua de impulsos aleatorios infinitesimales no correlacionados cada uno de los cuales tiene una dispersión infinitesimal. Por eso la expresión de la función aleatoria en función del ruido blanco es la extensión de la representación de su descomposición canónica (6.1.1) para el caso de sumandos infinitesimales. Como resultado, la suma en (6.1.1) será sustituida por una integral y obtendremos la representación de la función aleatoria $X(t)$ en la forma

$$X(t) = m_x(t) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda)\, x(t, \lambda)\, d\lambda, \tag{6.1.5}$$

donde $V(\lambda)$ es el ruido blanco de parámetro λ que varía en el intervalo $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. A toda representación de una función aleatoria en forma de integral (6.1.5) la llamaremos *representación canónica integral* de la misma. A las funciones $x(t, \lambda)$ de la variable t, corres-

pondientes a distintos valores fijos del parámetro λ en el intervalo (λ_1, λ_2), las denominaremos *funciones coordenadas* de la representación canónica integral.

De la representación canónica integral (6.1.5) de la función aleatoria $X(t)$ se deduce fácilmente la representación correspondiente de su función correlativa. Con ello, teniendo en cuenta que los sumandos elementales $V(\lambda)\, x(t, \lambda)\, d(\lambda)$ en la expresión (6.1.5) pueden ser complejos, a pesar de que la propia función aleatoria $X(t)$ es real, vamos a pasar en la fórmula (6.1.5) a las magnitudes conjugadas complejas, sustituyendo en esta fórmula t por t'. Entonces obtendremos

$$X(t') = m_x(t') + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \overline{V(\lambda')}\, \overline{x(t', \lambda')}\, d\lambda'. \qquad (6.1.6)$$

Transponiendo en las fórmulas (6.1.5) y (6.1.6) la esperanza matemática al primer miembro y multiplicando los valores obtenidos de la función aleatoria centrada, tendremos

$$X^0(t)\, X^0(t') = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda)\, \overline{V(\lambda')}\, x(t, \lambda)\, \overline{x(t', \lambda')}\, d\lambda\, d\lambda'. \qquad (6.1.7)$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición (4.2.13) de la función correlativa de una función aleatoria compleja, expresemos la función correlativa del ruido blanco $V(\lambda)$ por la fórmula

$$K_v(\lambda, \lambda') = M[V(\lambda)\, \overline{V(\lambda')}] = G(\lambda)\, \delta(\lambda - \lambda'). \qquad (6.1.8)$$

donde $G(\lambda)$ es la intensidad del ruido blanco $V(\lambda)$. De la fórmula (6.1.7), en virtud de (6.1.8), obtenemos

$$K_x(t, t') = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K_v(\lambda, \lambda')\, x(t, \lambda)\, \overline{x(t', \lambda')}\, d\lambda\, d\lambda' =$$

$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda)\, \delta(\lambda - \lambda')\, x(t, \lambda)\, \overline{x(t', \lambda')}\, d\lambda\, d\lambda'. \qquad (6.1.9)$$

Cumpliendo aquí la integración con respecto a λ', obtendremos definitivamente

$$K_x(t, t') = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda)\, x(t, \lambda)\, \overline{x(t', \lambda)}\, d\lambda. \qquad (6.1.10)$$

Esta fórmula ofrece *la representación canónica integral* de la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$.

Poniendo en la fórmula (6.1.10) $t = t'$, obtendremos la siguiente fórmula para la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda) |x(t, \lambda)|^2 d\lambda. \qquad (6.1.11)$$

La fórmula (6.1.5) muestra que la representación canónica integral de la función aleatoria la expresa en forma de una combinación lineal de magnitudes aleatorias infinitesimales no correlacionadas $V(\lambda)\, d\lambda$ con los coeficientes $x(t, \lambda)$ dependientes de t; con ello, la dispersión de la magnitud aleatoria $V(\lambda)\, d\lambda$ es igual a $G(\lambda)\, d\lambda$. Aplicando la fórmula (3.9.7) para la dispersión de una combinación lineal de las magnitudes aleatorias no correlacionadas y sustituyendo la suma por la integral, obtendremos precisamente la fórmula (6.1.11).

Las descomposiciones espectrales de funciones aleatorias estacionarias, examinadas en el capítulo precedente, son tipos particulares de las representaciones canónicas integrales del tipo (6.1.5).

§ 6.2. Descomposición canónica de una función aleatoria

Sean V_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) magnitudes aleatorias no correlacionadas arbitrarias con esperanzas matemáticas iguales a cero y dispersiones iguales a D_ν:

$$\left.\begin{aligned} &M[V_\nu] = 0, \quad M[V_\nu \overline{V_\mu}] = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu, \\ &D_\nu = M[|V_\nu|^2]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.1)$$

Hallemos las condiciones en las que la función aleatoria $X(t)$ puede ser representada por la descomposición canónica (6.1.1) cuyos coeficientes deben ser dichas magnitudes aleatorias V_ν. Para esto escribamos la fórmula (6.1.1.) en la forma

$$X^0(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu x_\nu(t). \qquad (6.2.2)$$

Suponiendo que esta descomposición ha sido obtenida, tendremos

$$M[X^0(t)\, \overline{V_\mu}] = \sum_{\nu=1}^{\infty} M[V_\nu \overline{V_\mu}]\, x_\nu(t). \qquad (6.2.3)$$

En virtud de (6.2.1) todos los términos de esta suma son iguales a cero, a excepción de uno para el cual el índice de adición ν es igual a μ. Por lo tanto, las fórmulas (6.2.3) y (6.2.1) dan

$$M[X^0(t)\, \overline{V_\mu}] = D_\mu x_\mu(t). \qquad (6.2.4)$$

De donde hallamos

$$x_\mu(t) = \frac{1}{D_\mu} M\left[X^0(t)\,\overline{V_\mu}\right] \quad \mu = 1, 2, \ldots) \tag{6.2.5}$$

Ahora bien, para que la función aleatoria $X(t)$ pueda ser representada por la descomposición canónica (6.1.1), es necesario que todas las funciones coordenadas $x_\mu(t)$ se expresen por la fórmula (6.2.5), es decir, sean iguales a las relaciones entre los momentos de correlación de la función aleatoria $X^0(t)$ con las magnitudes aleatorias V_μ y las dispersiones de las magnitudes correspondientes V_μ.

La fórmula (6.2.5) muestra que para hallar la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ tiene sentido tomar solamente tales magnitudes aleatorias V_ν que estén correlacionadas con la función aleatoria $X(t)$. Si cualquiera de las magnitudes aleatorias V_ν no está correlacionada con la función aleatoria $X(t)$, entonces la función coordenada correspondiente $x_\nu(t)$, de acuerdo con la fórmula (6.2.5), es idénticamente igual a cero y el término correspondiente desaparece de la descomposición (6.1.1).

El tipo más simple de magnitudes aleatorias, correlacionadas con la función aleatoria $X(t)$, son las combinaciones lineales de sus valores para los valores del argumento t que nos interesan. Por eso, para representar la función aleatoria $X(t)$ por la descomposición canónica en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ conviene determinar las magnitudes aleatorias V_ν por la fórmula *)

$$V_\nu = \int_\alpha^\beta \overline{a_\nu(t)}\, X^0(t)\, dt, \tag{6.2.6}$$

donde $a_\nu(t)$ son ciertas funciones que deben ser elegidas de modo que las magnitudes V_ν estén no correlacionadas.

Cambiando en la fórmula (6.2.6) la designación de la variable de integración y sustituyendo la expresión obtenida en la fórmula (6.2.5), tendremos

$$x_\mu(t) = \frac{1}{D_\mu} M\left[X^0(t) \int_\alpha^\beta a_\mu(t')\, X^0(t')\, dt'\right] =$$

$$= \frac{1}{D_\mu} \int_\alpha^\beta a_\mu(t')\, M\left[X^0(t)\, X^0(t')\right] dt' \tag{6.2.7}$$

o bien

$$x_\mu(t) = \frac{1}{D_\mu} \int_\alpha^\beta a_\mu(t')\, K_x(t, t')\, dt'. \tag{6.2.8}$$

*) Teniendo en cuenta que las magnitudes aleatorias V_ν pueden ser complejas, para que los cálculos ulteriores sean más cómodos, determinamos las funciones $a_\nu(t)$ de modo que en (6.2.6) bajo el signo integral haya funciones conjugadas complejas $\overline{a_\nu(t)}$.

Esta fórmula expresa las funciones coordenadas $x_\mu(t)$ por medio de las funciones $a_\mu(t)$ y la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$.

Para deducir las condiciones a las que deben satisfacer las funciones $a_\nu(t)$ con el fin de que las magnitudes aleatorias V_ν, determinadas por la fórmula (6.2.6), sean no correlacionadas, escribamos en virtud de (6.2.5)

$$M[V_\nu \overline{V_\mu}] = \int_\alpha^\beta \overline{a_\nu(t)}\, M[X^0(t)\,\overline{V_\mu}]\, dt = D_\mu \int_\alpha^\beta \overline{a_\nu(t)}\, x_\mu(t)\, dt. \quad (6.2.9)$$

De aquí se ve que para que las magnitudes aleatorias V_ν sean no correlacionadas y sus dispersiones sean iguales a los números correspondientes D_ν, las funciones $a_\nu(t)$ y $x_\nu(t)$ deben satisfacer las condiciones

$$\int_\alpha^\beta \overline{a_\nu(t)}\, x_\mu(t)\, dt = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu, \quad (6.2.10)$$

$$\int_\alpha^\beta \overline{a_\nu(t)}\, x_\nu(t)\, dt = 1. \quad (6.2.11)$$

Comúnmente estas condiciones se escriben brevemente en la forma

$$\int_\alpha^\beta \overline{a_\nu(t)}\, x_\mu(t)\, dt = \delta_{\nu\mu}, \quad (6.2.12)$$

donde $\delta_{\nu\mu}$ es una magnitud igual a la unidad cuando los índices son iguales e igual a cero cuando los índices son diferentes ($\delta_{\nu\nu} = 1$, $\delta_{\nu\mu} = 0$ para $\mu \neq \nu$).

Generalmente la igualdad (6.2.12) se llama *condición de biortogonalidad* de dos sistemas de funciones $x_\nu(t)$ y $a_\nu(t)$.

Así pues, para que las magnitudes aleatorias V_ν, determinadas por la fórmula (6.2.6), sean no correlacionadas y al mismo tiempo la función aleatoria $X(t)$ pueda ser representada por la descomposición (6.1.1) es necesario que las funciones $a_\nu(t)$ y las funciones $x_\nu(t)$ determinadas por la fórmula (6.2.8) satisfagan la condición de biortogonalidad (6.2.12). Es evidente que las condiciones (6.2.8) y (6.2.12) son también suficientes para que las magnitudes aleatorias V_ν, determinadas por la fórmula (6.2.6), sean no correlacionadas, pero, desde luego, esto no demuestra todavía, que, al cumplir las condiciones (6.2.8) y (6.2.12), la función aleatoria $X(t)$ puede ser representada por la descomposición canónica (6.1.1).

Mostremos ahora que se puede hallar un sistema de pares de funciones $a_\nu(t)$, $x_\mu(t)$ que satisfagan las condiciones (6.2.8) y (6.2.12). Para esto tomemos una secuencia arbitraria de funciones independien-

tes linealmente $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, ... *) y determinemos las magnitudes aleatorias

$$U_r = \int_\alpha^\beta \overline{f_r(t)}\, X(t)\, dt \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{6.2.13}$$

Las magnitudes aleatorias centradas correspondientes se expresarán por una fórmula análoga

$$U_r^0 = \int_\alpha^\beta \overline{f_r(t)}\, X^0(t)\, dt \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{6.2.14}$$

Hallemos las dispersiones y los momentos de correlación k_{rs} de las magnitudes aleatorias U_1, U_2 ... En virtud de la definición (3.7.6) y la fórmula (6.2.14) tenemos

$$k_{rs} = M[U_r^0 \overline{U_s^0}] = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \overline{f_r(t)}\, f_s(t')\, M[X^0(t)\, X^0(t')]\, dt\, dt' \tag{6.2.15}$$

o bien

$$k_{rs} = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \overline{f_r(t)}\, f_s(t')\, K_x(t, t')\, dt\, dt' \qquad (r, s = 1, 2, \ldots) \tag{6.2.16}$$

Introduciendo, para mayor comodidad, las funciones

$$z_s(t) = \int_\alpha^\beta f_s(t')\, K_x(t, t')\, dt' \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{6.2.17}$$

y tomando en consideración que debido a la simetría de la función correlativa

$$\int_\alpha^\beta \overline{f_r(t)}\, K_x(t, t')\, dt = \overline{\int_\alpha^\beta f_r(t)\, K_x(t', t)\, dt} = \overline{z_r(t')}. \tag{6.2.18}$$

podemos escribir la fórmula (6.2.16) en la forma

$$k_{rs} = \int_\alpha^\beta \overline{f_r(t)}\, z_s(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \overline{z_r(t)}\, f_s(t)\, dt \qquad (r, s = 1, 2, \ldots) \tag{6.2.19}$$

Ahora podemos construir el sistema de funciones aleatorias no correlacionadas V_ν, procediendo del modo siguiente. La primera función aleatoria V_1 puede ser elegida arbitrariamente, por ejemplo, se

*) Las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, ... se denominan independientes linealmente, si para ningún valor de n y ninguno de los valores $c_1, c_2, \ldots, c_n$ distintos de cero, la combinación lineal de estas funciones $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t)$ es idénticamente igual a cero.

puede tomar $V_1 = U_1^0$. La segunda magnitud V_2 debe ser elegida de modo que sea no correlacionada con V_1. Para esto es suficiente tomar $V_2 = c_{21} V_1 + U_2^0$ determinando el coeficiente c_{21} de la condición de no correlatividad de V_2 con V_1, etc. La magnitud V_ν debe satisfacer $\nu - 1$ condiciones de no correlatividad con $V_1 \ldots, V_{\nu-1}$. Para satisfacer estas condiciones, basta tomar por V_ν la suma de la magnitud U_ν^0 y de la combinación lineal de las magnitudes $V_1, \ldots$ $\ldots, V_{\nu-1}$ con coeficientes indefinidos. Ahora bien, pongamos

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= U_1^0, \\ V_2 &= c_{21} V_1 + U_2^0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_\nu &= c_{\nu 1} V_1 + c_{\nu 2} V_2 + \ldots + c_{\nu,\,\nu-1} V_{\nu-1} + U_\nu^0, \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.20)$$

y determinemos el coeficiente c_{21} de la condición de no correlatividad de las magnitudes V_2 y V_1 y, en general, para cualquier ν determinemos los coeficientes $c_{\nu 1}, c_{\nu 2}, \ldots, c_{\nu,\,\nu-1}$ de la condición de no correlatividad de la magnitud V_ν con $V_1, V_2, \ldots, V_{\nu-1}$. Para hacer esto, despejemos sucesivamente $U_1^0, U_2^0, \ldots, U_\nu^0$ en la ecuación (6.2.20):

$$\left.\begin{aligned} U_1^0 &= V_1, \\ U_2^0 &= -c_{21} V_1 + V_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_\nu^0 &= -c_{\nu 1} V_1 - c_{\nu 2} V_2 - \ldots - c_{\nu,\,\nu-1} V_{\nu-1} + V_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.21)$$

Ahora, suponiendo que todos los coeficientes $c_{\nu\mu}$ están determinados de modo que las magnitudes V_1, V_2 sean no correlacionadas, expresemos las dispersiones y los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias $U_1^0, U_2^0, \ldots$ con ayuda de las fórmulas (3.9.7) y (3.9.8). Como resultado obtendremos

$$k_{11} = D_1, \quad k_{\nu\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |c_{\nu\mu}|^2 D_\mu + D_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots;) \qquad (6.2.22)$$

$$k_{\nu 1} = -c_{\nu 1} D_1 \quad (\nu = 2, 3, \ldots), \qquad (6.2.23)$$

$$k_{\nu\mu} = c_{\nu 1} \overline{c_{\mu 1}} D_1 + \ldots + c_{\nu,\,\mu-1} \overline{c_{\mu,\,\mu-1}} D_{\mu-1} - c_{\nu\mu} D_\mu \qquad (6.2.24)$$
$$(\mu = 2, \ldots, \nu - 1; \ \nu = 3, 4, \ldots).$$

Como las dispersiones y los momentos de correlación $k_{\nu\mu}$ de las magnitudes aleatorias U_ν son conocidos, entonces las fórmulas (6.2.22), (6.2.23) y (6.2.24) pueden ser consideradas como ecuaciones que determinan los coeficientes incógnitos $c_{\nu\mu}$ y las dispersiones D_ν de las magnitudes aleatorias V_ν. Resolviendo sucesivamente estas ecuaciones, obtendremos las siguientes fórmulas de recurrencia para

las magnitudes D_ν, $c_{\nu\mu}$:

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = k_{11}, \quad c_{\nu 1} = \frac{k_{\nu 1}}{D_1} && (\nu = 2, 3, \ldots), \\ &D_\nu = k_{\nu\nu} - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |c_{\nu\mu}|^2 D_\mu && (\nu = 2, 3, \ldots), \\ &c_{\nu\mu} = \frac{1}{D_\mu}\left(\sum_{\lambda=1}^{\mu-1} c_{\nu\lambda}\overline{c_{\mu\lambda}} D_\lambda - k_{\nu\mu}\right) && \begin{pmatrix}\mu = 2, \ldots, \nu-1, \\ \nu = 3, 4, \ldots\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (6.2.25)$$

Por estas fórmulas se puede determinar sucesivamente las magnitudes D_1, $c_{\nu 1}$, D_2, $c_{\nu 2}$, D_3, $c_{\nu 3}$ . . . Como resultado serán hallados todos los coeficientes $c_{\nu\mu}$ en las fórmulas (6.2.20) y las dispersiones de las magnitudes aleatorias no correlacionadas V_ν. Empleando el procedimiento expuesto, se puede construir el sistema de magnitudes aleatorias no correlacionadas partiendo de cualquier sistema de magnitudes aleatorias independiente linealmente. Ya hicimos uso de este procedimiento en el § 3.11, donde en vez de $c_{\nu\mu}$ eran los coeficientes $\gamma_{\nu\mu} = -c_{\nu\mu}$.

Sustituyendo en (6.2.20) la expresión (6.2.14) de las magnitudes aleatorias centradas U_τ^0, expresemos las magnitudes aleatorias V_ν por la fórmula (6.2.6) donde las funciones $a_\nu(t)$ se determinan por las fórmulas

$$a_1(t) = f_1(t), \quad a_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} a_\mu(t) + f_\nu(t) \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \quad (6.2.26)$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (6.2.8) para $\mu = 1, 2, \ldots$ y teniendo en cuenta (6.2.17), obtendremos

$$x_1(t) = \frac{z_1(t)}{D_1}, \quad x_\nu(t) = \frac{1}{D_\nu}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} D_\mu x_\mu(t) + z_\nu(t)\right] \quad (6.2.27)$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots).$$

Así pues, el método expuesto ofrece la posibilidad de hallar tal sistema de funciones $a_\nu(t)$, que las magnitudes aleatorias correspondientes V_ν, determinadas por la fórmula (6.2.6), sean no correlacionadas, y el sistema correspondiente de funciones coordenadas $x_\nu(t)$, determinadas por la fórmula (6.2.8). Estas funciones $a_\nu(t)$ y $x_\nu(t)$ satisfacen la condición de biortogonalidad (6.2.12), puesto que esta condición, como hemos visto, es consecuencia de la no correlatividad de las magnitudes aleatorias V_ν y de la fórmula (6.2.5) que en este caso tiene la forma (6.2.8). Le dejamos al lector que por sí mismo lleve a cabo la comprobación directa del hecho de que las funciones $a_\nu(t)$ y $x_\nu(t)$, determinadas por las fórmulas (6.2.25), (6.2.26) y (6.2.27), satisfacen la condición de biortogonalidad (6.2.12).

Eligiendo diversas funciones iniciales $f_r(t)$ de las cuales se exige solamente la independencia lineal, obtendremos diferentes sistemas de pares de funciones $a_v(t)$, $x_v(t)$ que satisfacen las condiciones (6.2.8) y (6.2.12). Ahora bien, debido a la arbitrariedad de las funciones iniciales $f_r(t)$ se puede por una infinidad de procedimientos determinar las funciones $a_v(t)$, $x_v(t)$ que satisfacen las condiciones (6.2.8) y (6.2.12).

Puesto que las realizaciones de la mayoría de las funciones aleatorias que se encuentran en la práctica tienen carácter oscilatorio, prácticamente es conveniente elegir en calidad de funciones de partida $f_r(t)$ funciones trigonométricas, correspondientes a distintos períodos, o los productos de las funciones trigonométricas por las funciones exponenciales escogidas de un modo correspondiente. Por ejemplo, al elegir arbitrariamente la sucesión de frecuencias ω_1, ω_2, . . ., ω_n . . . cuando $\omega_n \to \infty$, se puede tomar

$$f_1(t) = 1,\ f_{2n}(t) = \operatorname{sen} \omega_n t,\ f_{2n+1}(t) \cos \omega_n t \qquad (6.2.28)$$
$$(n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Al escoger las frecuencias ω_1, ω_2, . . ., es necesario solamente preocuparse de que las funciones (6.2.28) sean linealmente independientes en el correspondiente intervalo de variación de la variable t. Por lo demás, la elección de las frecuencias ω_n no se limita en nada. Para resolver algunos problemas de la Teoría de mando automático es conveniente añadir a las funciones (6.2.28) aún las funciones delta con las particularidades en los extremos del intervalo de integración $\delta(t-\alpha)$, $\delta(t-\beta)$ y sus derivadas hasta un orden determinado.

Ejemplo 6.2.1. Hallar la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ con esperanza matemática idénticamente igual a cero y la función correlativa

$$K_x(t, t') = De^{-\alpha|t-t'|},$$

en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant T$.

Una vez determinadas las funciones $f_r(t)$ por las fórmulas (6.2.28), hallamos por la fórmula (6.2.17) las funciones $z_s(t)$. Teniendo en cuenta que en este caso $\alpha = 0$, $\beta = T$, obtendremos

$$z_1(t) = D\int_0^T e^{-\alpha|t-t'|}\,dt' = D\left\{\int_0^t e^{-\alpha(t-t')}\,dt' + \int_t^T e^{-\alpha(t'-t)}\,dt'\right\} =$$

$$= D\left\{\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right\} = \frac{D}{\alpha}\left[2 - e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(T-t)}\right]$$

y análogamente

$$z_{2n}(t) = D\int_0^T e^{-\alpha|t-t'|}\operatorname{sen}\omega_n t'\,dt' =$$

$$= \frac{D\alpha}{\alpha^2+\omega_n^2}\left[2\operatorname{sen}\omega_n t + \frac{\omega_n}{\alpha}e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(T-t)}\left(\operatorname{sen}\omega_n T + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\omega_n}{\alpha}\cos\omega_n T\right)\right] \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$z_{2n+1}(t) = D\int_0^T e^{-\alpha|t-t'|}\cos\omega_n t'\,dt' = \frac{D\alpha}{\alpha^2+\omega_n^2}\left[2\cos\omega_n t - e^{-\alpha t} - \right.$$

$$\left. - e^{+\alpha(t-T)}\left(\cos\omega_n T - \frac{\omega_n}{\alpha}\operatorname{sen}\omega_n T\right)\right] \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas y las (6.2.28) de las funciones $f_r(t)$ en la fórmula (6.2.19), hallamos los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias U_r determinadas por la fórmula (6.2.13). Con ello, todas las integrales (6.2.13) se calculan en este caso de un modo absolutamente elemental. Para abreviar, nos limitaremos al caso cuando las frecuencias ω_k se han elegido múltiples de la frecuencia fundamental $\omega_1 = 2\pi/T$ correspondiente al período T:

$$\omega_k = k\omega_1 = 2\pi k/T \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

En este caso $\cos\omega_n T = 1$, $\operatorname{sen}\omega_n T = 0$ y la fórmula (6.2.19) da

$$k_{11} = \int_0^T z_1(t)\,dt = \frac{2D}{\alpha^2}(e^{-\alpha T} - 1 + \alpha T),$$

$$k_{1,\,2n} = k_{2n,\,1} = \int_0^T z_{2n}(t)\,dt = 0,$$

$$k_{1,\,2n+1} = k_{2n+1,\,1} = \int_0^T z_{2n+1}(t)\,dt = \frac{2D(1-e^{-\alpha T})}{\alpha^2+\omega_n^2},$$

$$k_{2n+1,\,2n+1} = \int_0^T z_{2n+1}(t)\cos\omega_n t\,dt = \frac{D\alpha}{\alpha^2+\omega_n^2}\left[T - \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega_n^2}(1-e^{-\alpha T})\right],$$

$$k_{2n+1,\,2m+1} = \int_0^T z_{2n+1}(t)\cos\omega_m t\,dt = -\frac{2D\alpha^2(1-e^{-\alpha T})}{(\alpha^2+\omega_n^2)(\alpha^2+\omega_m^2)},$$

$$k_{2n,\,2n} = \int_0^T z_{2n}(t)\operatorname{sen}\omega_n t\,dt = \frac{D\alpha}{\alpha^2+\omega_n^2}\left[T + \frac{2\omega_n^2}{\alpha(\alpha^2+\omega_n^2)}(1-e^{-\alpha T})\right],$$

$$k_{2n,\,2m} = \int_0^T z_{2n}(t)\operatorname{sen}\omega_m t\,dt = \frac{2D\omega_n\omega_m(1-e^{-\alpha T})}{(\alpha^2+\omega_n^2)(\alpha^2+\omega_m^2)},$$

$$k_{2n,\,2m+1} = k_{2m+1,\,2n} = 0 \qquad (n,\ m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Una vez determinados los momentos de correlación k_{rs}, calculamos, por las fórmulas (6.2.25), sucesivamente las magnitudes D_1, $c_{\nu 1}$, D_2, $c_{\nu 2}$, D_3, $c_{\nu 3}$, ... Con ello, nos convencemos de que en este caso todos los coeficientes $c_{\nu\mu}$, con los índices de distinta paridad, son iguales a cero. Por fin, con ayuda de las fórmulas (6.2.26) y (6.2.27) hallamos las funciones $a_\nu(t)$ y las funciones coor-

denadas $x_\nu(t)$:

$$a_1(t)=1, \quad a_2(t)=\operatorname{sen}\omega_1 t, \quad a_3(t)=c_{31}+\cos\omega_1 t,$$

$$a_{2n}(t)=\sum_{m=1}^{n-1} c_{2n,\,2m}a_{2m}(t)+\operatorname{sen}\omega_n t,$$

$$a_{2n+1}(t)=\sum_{m=1}^{n} c_{2n+1,\,2m-1}a_{2m-1}(t)+\cos\omega_n t \quad (n=2,\ 3,\ \ldots),$$

$$x_1(t)=\frac{z_1(t)}{D_1}, \quad x_2(t)=\frac{z_2(t)}{D_2},$$

$$x_3(t)=\frac{c_{31}x_1(t)+z_3(t)}{D_3},$$

$$x_{2n}(t)=\frac{1}{D_{2n}}\left[\sum_{m=1}^{n-1} c_{2n,\,2m}x_{2m}(t)+z_{2n}(t)\right],$$

$$x_{2n+1}(t)=\frac{1}{D_{2n+1}}\left[\sum_{m=1}^{n} c_{2n+1,\,2m-1}x_{2m-1}(t)+z_{2n+1}(t)\right] \quad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

§ 6.3. Fórmula para el término residual de la descomposición canónica

La precisión con que la función aleatoria viene representada por el segmento final de la descomposición canónica se puede estimar por la magnitud relativa de la esperanza matemática del cuadrado del módulo del término residual o bien, lo que es lo mismo, de la dispersión de este término. Poniendo

$$R_n(t)=X^0(t)-\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu x_\nu(t), \tag{6.3.1}$$

podemos escribir

$$M[|R_n(t)|^2]=M[R_n(t)\overline{R_n(t)}]=M[|X^0(t)|^2]-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\{M[X^0(t)\overline{V_\nu}]\overline{x_\nu(t)}+M[\overline{X^0(t)}V_\nu]x_\nu(t)\}+$$

$$+\sum_{\nu,\mu=1}^{n} M[V_\nu\overline{V_\mu}]x_\nu(t)\overline{x_\mu(t)} \tag{6.3.2}$$

o bien, teniendo en cuenta (6.2.1) y (6.2.5),

$$M[|R_n(t)|^2]=D_x(t)-\sum_{\nu=1}^{n}\{D_\nu x_\nu(t)\overline{x_\nu(t)}+D_\nu\overline{x_\nu(t)}x_\nu(t)\}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu x_\nu(t)\overline{x_\nu(t)}=D_x(t)-\sum_{\nu=1}^{n} D_\nu|x_\nu(t)|^2. \tag{6.3.3}$$

Ahora bien, la dispersión del término residual de la descomposición canónica (6.1.1) de la función aleatoria $X(t)$ se expresa por la fór-

mula

$$M[|R_n(t)|^2] = D_x(t) - \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu |x_\nu(t)|^2. \qquad (6.3.4)$$

Como una característica práctica cómoda de la precisión con que la función aleatoria viene representada aproximadamente por el segmento final de su descomposición canónica sirve el error relativo en la dispersión de la función aleatoria

$$\varepsilon_n(t) = \frac{M[|R_n(t)|^2]}{D_x(t)}. \qquad (6.3.5)$$

Si la dispersión del término residual tiende a cero cuando $n \to \infty$ para todas las t en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$:

$$\lim_{n\to\infty} M[|R_n(t)|^2] = 0 \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \qquad (6.3.6)$$

entonces se dice que la descomposición (6.1.1) *converge en la media cuadrática* en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Se puede demostrar que para cualquier función aleatoria con dispersión finita existe una infinidad de descomposiciones canónicas que convergen en la media cuadrática a esta función aleatoria en el intervalo finito asignado de antemano. Aquí nos limitaremos a la demostración de esta afirmación para un tipo particular de descomposiciones canónicas cuando en calidad de coeficientes aleatorios de la descomposición V_ν se eligen las combinaciones lineales de los valores de la función aleatoria centrada $X^0(t)$ en la serie discreta de puntos de intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *).

Eligiendo como magnitudes aleatorias V_ν las combinaciones lineales de los valores de la función aleatoria centrada $X^0(t)$ en una serie discreta de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$, dispuestos en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, podemos tomar la primera combinación indicada de un modo absolutamente arbitrario; la segunda combinación debe someterse a una única condición de no correlatividad con la primera, etc.; la enésima combinación lineal debe ser no correlacionada con las $n - 1$ anteriores.

Como resultado expresaremos los valores de la función aleatoria $X(t)$ en los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ por la descomposición canónica (6.1.1) que contiene n sumandos sin contar la esperanza matemática $m_x(t)$. Dejando al lector que obtenga él mismo por tal vía la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ en la serie discreta de puntos $t_1, t_2, \ldots t_n$, observemos que esta descomposición canónica se obtendrá de las fórmulas generales deducidas anteriormente, si las funciones $a_\nu(t)$ se determinan en forma de combinaciones linea-

*) El lector puede hallar la demostración para el caso general en el libro de V. S. Pugachev «Teoría de funciones aleatorias y su aplicación en los problemas del mando automático», Fizmatguiz, 1962, § 60.

les de las funciones delta correspondientes

$$a_\nu(t) = \sum_{h=1}^{n} a_{\nu h}\delta(t - t_h). \tag{6.3.7}$$

Para esto es suficiente tomar en calidad de funciones $f_r(t)$ las combinaciones lineales arbitrarias de las mismas funciones delta:

$$f_r(t) = \sum_{h=1}^{n} f_{rh}\delta(t - t_h), \tag{6.3.8}$$

donde f_{rh} son coeficientes arbitrarios. Es evidente que para cualquier n finita existen solamente n combinaciones linealmente independientes de funciones delta del tipo (6.3.8). En particular, en la fórmula (6.3.8) se puede poner $f_{rr} = 1$, $f_{rh} = 0$ cuando $h \neq r$ ($r = 1, 2, \ldots, n$).

Sustituyendo la expresión (6.3.8) en las fórmulas (6.2.17) y (6.2.19), determinemos las funciones $z_r(t)$, así como las dispersiones y los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias U_r ($r = 1, 2, \ldots, n$). Luego, determinando por las fórmulas (6.2.25) los coeficientes $c_{\nu\mu}$ y las dispersiones D_ν de las magnitudes aleatorias V_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), hallaremos con ayuda de las fórmulas (6.2.26) los coeficientes $a_{\nu h}$ en la fórmula (6.3.7). A continuación, sustituyendo la expresión (6.3.7) en (6.2.6) y (6.2.8) y cumpliendo la integración [teniendo en cuenta la fórmula (2.2.6)], reduzcamos las fórmulas (6.2.6) y (6.2.8) correspondientemente a la forma

$$V_\nu = \sum_{h=1}^{n} \overline{a_{\nu h}} X^0(t_h) \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{6.3.9}$$

$$x_\nu(t) = \frac{1}{D_\nu} \sum_{h=1}^{n} a_{\nu h} K_x(t, t_h) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.3.10}$$

La condición de biortogonalidad (6.2.12) toma la forma

$$\sum_{h=1}^{n} a_{\nu h} x_\mu(t_h) = \delta_{\nu\mu} \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n). \tag{6.3.11}$$

Por fin, la descomposición canónica (6.1.1) de la función aleatoria $X(t)$ toma la forma

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{\nu=1}^{n} V_\nu x_\nu(t). \tag{6.3.12}$$

Demostremos que esta igualdad es exacta en todos los puntos t_1, $t_2, \ldots, t_n$. Para esto, en virtud de (6.3.9), escribamos

$$\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu x_\nu(t_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \overline{a_{\nu h}} X^0(t_h) x_\nu(t_k) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} X^0(t_h) \sum_{\nu=1}^{n} \overline{a_{\nu h}} x_\nu(t_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.3.13}$$

Poniendo, para abreviar,

$$b_{hk} = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{a_{\nu h}} x_\nu (t_k) \quad (h,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{6.3.14}$$

podemos escribir la igualdad (6.3.13) en la forma

$$\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu x_\nu (t_k) = \sum_{h=1}^{n} b_{hk} X^0 (t_h) \quad (k = 1,\ \ldots,\ n). \tag{6.3.15}$$

Tomemos ahora las igualdades (6.3.11) correspondientes al valor fijo del índice ν:

$$\left.\begin{array}{l} a_{\nu 1} x_1 (t_1) + a_{\nu 2} x_1 (t_2) + \ldots + a_{\nu n} x_1 (t_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\nu 1} x_{\nu-1} (t_1) + a_{\nu 2} x_{\nu-1} (t_2) + \ldots + a_{\nu n} x_{\nu-1} (t_n) = 0, \\ a_{\nu 1} x_\nu (t_1) + a_{\nu 2} x_\nu (t_2) + \ldots + a_{\nu n} x_\nu (t_n) = 1 \\ a_{\nu 1} x_{\nu+1} (t_1) + a_{\nu 2} x_{\nu+1} (t_2) + \ldots + a_{\nu n} x_{\nu+1} (t_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\nu 1} x_n (t_1) + a_{\nu 2} x_n (t_2) + \ldots + a_{\nu n} x_n (t_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{6.3.16}$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $\overline{a_{1h}}$, la segunda por $\overline{a_{2h}}$ y, en general, la μ-ésima ecuación por $\overline{a_{\mu h}}$ y sumándolas, obtendremos en virtud de (6.3.14)

$$a_{\nu 1} b_{h1} + a_{\nu 2}\, b_{h2} + \ldots\, a_{\nu n} b_{hn} = a_{\nu h}. \tag{6.3.17}$$

Asignando aquí al índice ν los valores $\nu = 1, 2, \ldots, n$, obtendremos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que determina las magnitudes incógnitas b_{hk} correspondientes al valor dado del índice h. Es evidente que el sistema de ecuaciones (6.3.17) correspondientes a $\nu = 1, 2, \ldots, n$, tiene la solución

$$b_{hh} = 1,\ b_{hk} = 0 \text{ si } k \neq h. \tag{6.3.18}$$

Esta solución es única, puesto que debido a la independencia lineal de las funciones a_ν, el determinante del sistema de ecuaciones (6.3.17), compuesto de los coeficientes $a_{\nu k}$ ($\nu,\ k = 1, 2, \ldots, n$), no es igual a cero. Asignando al índice h en (6.3.18) todos los valores posibles $h = 1, 2, \ldots, n$, hallaremos todos los coeficientes b_{hk}. Ahora bien, las magnitudes b_{hh}, determinadas por la fórmula (6.3.14), con los mismos índices h y k son iguales a la unidad y las demás son iguales a cero. Por consiguiente, la fórmula (6.3.15) toma la forma

$$\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu x_\nu (t_k) = X^0 (t_k) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{6.3.19}$$

Así pues, nuestra afirmación que la fórmula (6.3.12) representa

exactamente la función aleatoria $X(t)$ en los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ queda demostrada.

La fórmula (6.3.19) muestra que en todos los puntos $t_1, \ldots, t_n$ la función aleatoria $X(t_n)$ se expresa exactamente por la descomposición canónica que contiene n términos. Por lo tanto, la dispersión del término residual $R_n(t)$ en este caso es igual a cero cuando $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$. En el caso de una función correlativa continua las funciones coordenadas $x_v(t)$, determinadas por la fórmula (6.3.10), también son continuas, debido a lo cual también la dispersión del término residual $R_n(t)$ es función continua de t. Por eso, eligiendo n lo suficientemente grande, podemos disponer los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de un modo suficientemente denso en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ para que la dispersión del término residual sea tan pequeña como se quiera en todos los puntos del intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Ahora bien, al aumentar ilimitadamente el número de puntos en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ de modo que la distancia máxima entre los puntos vecinos tienda a cero cuando $n \to \infty$, obtendremos la descomposición canónica de la función aleatoria, la dispersión de cuyo término residual tiende a cero cuando $n \to \infty$, para todos los valores de t en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Como consecuencia de la arbitrariedad de los coeficientes f_{rh} en la fórmula (6.3.8), podemos obtener una infinidad de tales descomposiciones canónicas convergentes.

Así pues, hemos demostrado que toda función aleatoria que tiene una función correlativa continua puede ser representada en cualquier intervalo finito, valiéndonos de una infinidad de procedimientos, por una descomposición canónica que converge a ella en la media cuadrática.

Está claro que para la práctica tiene importancia no la convergencia de la descomposición canónica, sino la posibilidad de obtener un error medio cuadrático de representación de la función aleatoria, por un número pequeño de primeros términos de la descomposición canónica, lo suficientemente pequeño. En lo que a esto atañe, conviene observar que las perturbaciones aleatorias de entrada de los sistemas automáticos, como regla, no pueden ser representadas con precisión admisible por un número pequeño de términos de la descomposición canónica. Sin embargo, en este caso el sistema que se examina deja pasar de ordinario sólo un pequeño número de primeras funciones coordenadas y, debido a su capacidad de inercia, no deja pasar la mayor parte de dichas funciones. Por eso, para investigar la precisión de los sistemas automáticos, es suficiente de ordinario tomar en las descomposiciones canónicas de perturbaciones de entrada un número relativamente pequeño de términos (de 20 a 30), a pesar de que con ello se obtiene una precisión muy baja de representación de las propias perturbaciones aleatorias indicadas.

§ 6.4. Construcción de la descomposición canónica de una función aleatoria por la descomposición canónica de su función correlativa

En los problemas prácticos se logra a veces hallar con relativa facilidad la descomposición canónica (6.1.3) de la función correlativa. Demostremos que a esta descomposición le corresponde siempre la descomposición canónica de la propia función aleatoria con las mismas funciones coordenadas. Supongamos que se logró representar la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ por la descomposición canónica

$$K_x(t, t') = \sum_{v=1}^{\infty} D_v x_v(t) \overline{x_v(t')}. \tag{6.4.1}$$

Supongamos que esta descomposición representa la función correlativa en el cuadrado $\alpha \leqslant t, t' \leqslant \beta$. Demostremos que a la descomposición (6.4.1) le corresponde la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ en el intervalo (α, β) con las mismas funciones coordenadas:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{v=1}^{\infty} V_v x_v(t). \tag{6.4.2}$$

Para la demostración basta hallar un sistema de funciones $a_v(t)$ que satisfagan, junto con las funciones $x_v(t)$, las condiciones (6.2.8) y (6.2.12) en el intervalo (α, β). Entonces las magnitudes aleatorias V_v, determinadas por la fórmula (6.2.6), serán no correlacionadas y sus dispersiones serán iguales a los números correspondientes de D_v. Con ello, la dispersión del término residual de la descomposición (6.4.2) tenderá a cero para todos los valores de t en el intervalo (α, β), en virtud de las fórmulas (6.3.4) y (6.4.1).

Para abreviar, introduzcamos para las integrales del producto de dos funciones la designación

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(t)\, \psi(t)\, dt. \tag{6.4.3}$$

Esta expresión se denomina comúnmente *producto escalar* de las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, por analogía con la expresión corriente del producto escalar de vectores en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ se llaman *ortogonales* si su producto escalar es igual a cero:

$$(\varphi, \psi) = 0.$$

Primeramente hallemos el sistema de funciones auxiliares $g_1(t)$, $g_2(t)$, . . ., $g_n(t)$ que poseen la propiedad de ser cada una de ellas ortogonal a todas las funciones $x_v(t)$ con números menores y no ser

ortogonal a la función $x_\nu(t)$ con el mismo número:

$$(g_\nu, x_\mu) = 0 \ (\mu < \nu), \ (g_\nu, x_\nu) \neq 0 \ (\nu = 1, 2, \ldots). \quad (6.4.4)$$

Para esto tomemos una función arbitraria $f_1(t)$ que satisfaga la condición

$$(f_1, x_1) \neq 0, \quad (6.4.5)$$

y pongamos

$$g_1(t) = f_1(t). \quad (6.4.6)$$

Luego tomemos una función arbitraria $f_2(t)$ independiente linealmente de $f_1(t)$ y pongamos

$$g_2(t) = b_{21} g_1(t) + f_2(t). \quad (6.4.7)$$

En virtud de (6.4.5) y (6.4.6), el coeficiente b_{21} se puede elegir de modo que la función $g_2(t)$ sea ortogonal con respecto a $x_1(t)$. Multiplicando la igualdad (6.4.7) por $x_1(t)$ e integrando en los límites de α a β, obtendremos

$$(g_2, x_1) = b_{21}(g_1, x_1) + (f_2, x_1). \quad (6.4.8)$$

Igualando esta expresión a cero, hallamos b_{21}:

$$b_{21} = -\frac{(f_2, x_1)}{(g_1, x_1)}. \quad (6.4.9)$$

Luego hallamos la magnitud (g_2, x_2). Si esta magnitud resulta ser igual a cero, es necesario cambiar la elección de la función $f_2(t)$ para satisfacer la condición $(g_2, x_2) \neq 0$. Prosiguiendo de tal modo, supongamos que han sido halladas las funciones $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_{n-1}(t)$ que satisfacen las condiciones (6.4.4). Tomemos una función arbitraria $f_n(t)$ linealmente independiente de $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_{n-1}(t)$ y supongamos que

$$g_n(t) = b_{n1} g_1(t) + \ldots + b_{n,n-1} g_{n-1}(t) + f_n(t). \quad (6.4.10)$$

Multiplicando esta igualdad por $\overline{x_1(t)}$, integrando en los límites de α a β y teniendo en cuenta que las funciones $g_2(t), \ldots g_{n-1}(t)$ son ortogonales con respecto a $x_1(t)$, obtendremos

$$(g_n, x_1) = b_{n1}(g_1, x_1) + (f_n, x_1). \quad (6.4.11)$$

Igualando a cero esta expresión, hallamos b_{n1}:

$$b_{n1} = -\frac{(f_n, x_1)}{(g_1, x_1)}. \quad (6.4.12)$$

Miltipliquemos ahora la igualdad (6.4.10) por $\overline{x_\mu(t)}$ $(\mu < n)$ e integremos en los límites de α a β. Entonces, tomando en consideración que las funciones $g_{\mu+1}(t), \ldots, g_{n-1}(t)$ son ortogonales con respecto a $x_\mu(t)$, obtendremos

$$(g_n, x_\mu) = b_n(g_1, x_\mu) + \ldots + b_{n\mu}(g_\mu, x_\mu) + (f_n, x_\mu). \quad (6.4.13)$$

Igualando a cero esta expresión obtenemos la fórmula recurrente para los coeficientes $b_{n\mu}$:

$$b_{n\mu} = -\frac{(f_n, x_\mu) + b_{n1}(g_1, x_\mu) + \ldots + b_{n,\mu-1}(g_{\mu-1}, x_\mu)}{(g_\mu, x_\mu)} \qquad (6.4.14)$$

$$(\mu = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Una vez determinados por las fórmulas (6.4.14) los coeficientes $b_{n1}, b_{n,n-1}$, hallamos la magnitud (g_n, x_n). Si ésta resulta igual a cero, debemos alcanzar que no sea así, variando la elección de la función $f_n(t)$. Así pues, el procedimiento expuesto permite hallar el sistema de funciones $g_r(t)$ que satisfacen las condiciones (6.4.4).

Determinemos ahora las funciones $a_\nu(t)$ por la fórmula

$$a_\nu(t) = \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} c_{\nu\lambda} g_\lambda(t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \qquad (6.4.15)$$

Como las funciones $g_\nu(t)$, $g_{\nu+1}(t)$ . . . son ortogonales con respecto a todas las funciones $x_1(t)$, . . ., $x_{\nu-1}(t)$, entonces la función $a_\nu(t)$ es ortogonal con respecto a $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{\nu-1}(t)$. Por consiguiente, eligiendo los coeficientes $c_{\nu\lambda}$, queda alcanzar que cada función $a_\nu(t)$ sea ortogonal también con respecto a todas las funciones $x_{\nu+1}(t)$, $x_{\nu+2}(t)$, . . ., y la integral de su producto por $\overline{x_\nu(t)}$ sea igual a la unidad. Multiplicando (6.4.15) por $\overline{x_\nu(t)}$, integrando en los límites de α a β y teniendo en cuenta que todas las funciones $g_{\nu+1}, g_{\nu+2}(t)$... son ortogonales con respecto a $x_\nu(t)$, obtendremos

$$(a_\nu, x_\nu) = c_{\nu\nu}(g_\nu, x_\nu). \qquad (6.4.16)$$

Igualando esta magnitud a la unidad, hallamos el coeficiente $c_{\nu\nu}$:

$$c_{\nu\nu} = \frac{1}{(g_\nu, x_\nu)}. \qquad (6.4.17)$$

Multipliquemos ahora la igualdad (6.4.15) por $\overline{x_\mu(t)}$ $(\mu > \nu)$ e integremos en los límites de α a β. Entonces, tomando en consideración que todas las funciones $g_{\mu+1}(t)$, $g_{\mu+2}(t)$, . . . son ortogonales con respecto a $x_\mu(t)$, obtendremos

$$(a_\nu, x_\mu) = c_{\nu\nu}(g_\nu, x_\mu) + \ldots + c_{\nu,\mu-1}(g_{\mu-1} x_\mu) + c_{\nu\mu}(g_\mu, x_\mu). \qquad (6.4.18)$$

Igualando a cero esta expresión, obtenemos la siguiente fórmula recurrente para los coeficientes $c_{\nu,\mu}$:

$$c_{\nu\mu} = \frac{c_{\nu\nu}(g_\nu, x_\mu) + \ldots + c_{\nu,\mu-1}(g_{\mu-1}, x_\mu)}{(g_\mu, x_\mu)} \qquad (6.4.19)$$

$$(\mu = \nu+1, \nu+2, \ldots, \nu = 1, 2, \ldots).$$

Prosiguiendo por esta vía, se pueden determinar sucesivamente todos los coeficientes $c_{\nu\mu}$ de modo que las funciones $a_\nu(t)$, determinadas por la fórmula (6.4.15), satisfagan la condición de biortogonalidad (6.2.12). Demostremos que estas funciones satisfacen también todas las condiciones (6.2.8). Para esto sustituyamos en (6.2.8) la expresión (6.4.1) de la función correlativa. Entonces obtendremos *)

$$x_\mu(t) = \frac{1}{D_\mu} \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu (a_\mu, x_\nu) x_\nu(t). \qquad (6.4.20)$$

Esta igualdad se convierte en identidad puesto que las funciones $a_\mu(t)$, $x_\nu(t)$ satisfacen la condición de biortogonalidad (6.2.12). Así pues, el sistema hallado de funciones $a_\nu(t)$, junto con las funciones coordenadas $x_\nu(t)$, satisface todas las condiciones necesarias. Por lo tanto, las magnitudes aleatorias V_ν, determinadas por la fórmula (6.2.6), no son correlacionadas en virtud de la igualdad (6.2.9) y sus dispersiones son iguales a los números correspondientes de D_ν. De aquí se deduce también que todos los números de D_ν son positivos. Por eso la función correlativa puede ser representada por la descomposición canónica (6.4.1) solamente con los coeficientes positivos de D_ν. Por fin, en virtud de las fórmulas (6.3.4) y (6.4.1), la dispersión del término residual de la descomposición canónica (6.4.2) de la función aleatoria $X(t)$ tiende a cero para todos los valores de t en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Así pues, hemos demostrado por completo la afirmación enunciada.

El proceso expuesto de determinación de las funciones $a_\nu(t)$ que satisfacen, junto con las funciones dadas $x_\nu(t)$, las condiciones de biortogonalidad (6.2.12) se puede continuar teóricamente sin límites. Prácticamente, siempre conviene limitarlo a cierto número finito de funciones. Después de determinar por el procedimiento expuesto las funciones $g_1(t)$, $g_2(t)$, . . ., $g_n(t)$ que satisfacen las condiciones (6.4.4), hallamos las funciones $a_\nu(t)$ en forma

$$a_\nu(t) = \sum_{\lambda=\nu}^{n} c_{\nu\lambda} g_\lambda(t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6.4.21)$$

Una vez determinados los coeficientes $c_{\nu\lambda}$ por las fórmulas (6.4.17) y (6.4.19) para $\nu = 1, \ldots, n$, hallaremos las funciones $a_1(t)$, ..., $a_n(t)$ que satisfacen, junto con las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, la condición de biortogonalidad (6.2.12).

Si la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ se expresa con suficiente precisión por los primeros n términos de la descomposición (6.4.1), entonces las funciones $a_1(t)$, . . ., $a_n(t)$ halladas de

*) La integración término a término de la serie (6.4.1) es posible si esta serie converge uniformemente con respecto a cada una de las variables en el intervalo (α, β). Generalmente esta condición se cumple, si la función correlativa $K_x(t, t')$ es limitada y continua.

este modo, satisfarán aproximadamente también, junto con las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . ., $x_n(t)$, las condiciones (6.2.8). A consecuencia de esto la fórmula (6.4.2) ofrece la descomposición canónica aproximada de la función aleatoria $X(t)$, que contiene n términos. Con ello, la dispersión del término residual será aproximadamente igual, en virtud de (6.3.4), al término residual del segmento correspondiente de la descomposición (6.4.1) cuando $t = t'$.

Ejemplo 6.4.1. Supongamos que la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ se expresa en el intervalo $|\tau| < 2T$ por la fórmula

$$k_X(\tau) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu \cos \omega_\nu \tau.$$

Al representar esta fórmula en la forma

$$k_X(t-t') = \sum_{\nu=1}^{n} (D_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t \operatorname{sen} \omega_\nu t' + D_\nu \cos \omega_\nu t \cos \omega_\nu t'),$$

observamos que ésta da la descomposición canónica de la función correlativa en el cuadrado $|t| < T$, $|t'| < T$ (al variar t y t' en estos límites, $\tau = t - t'$ varía en los límites $|\tau| < 2T$). Según lo demostrado, a esta descomposición canónica de la función correlativa le corresponde la de la función aleatoria $X(t)$ en el intervalo $|t| < T$:

$$X(t) = m_X + \sum_{\nu=1}^{n} (U_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t + Z_\nu \omega_\nu t).$$

Aquí U_ν, Z_ν son magnitudes aleatorias no correlacionadas con esperanzas matemáticas iguales a cero y las dispersiones $D[U_\nu] = D[Z_\nu] = D_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$).

Hallemos ahora por medio del método expuesto las funciones $a_\nu(t)$ que satisfacen, junto con las funciones coordenadas $x_\nu(t)$, las condiciones de biortogonalidad (6.2.12), limitándonos, para simplicidad, al caso $n = 2$, $\omega_1 = \pi/2T$, $\omega_2 = \pi/4T$. En este caso tenemos cuatro funciones coordenadas:

$$x_1(t) = \operatorname{sen} \omega_1 t, \quad x_2(t) = \cos \omega_1 t, \quad x_3(t) = \operatorname{sen} \omega_2 t, \quad x_4(t) = \cos \omega_2 t.$$

Supongamos también que

$$f_1(t) = \operatorname{sen} \omega_1 t, \quad f_2(t) = \cos \omega_1 t, \quad f_3(t) = \operatorname{sen} \omega_2 t, \quad f_4(t) = \cos \omega_2 t$$

y eligimos la primera función $g_1(t)$ coincidente con $f_1(t)$:

$$g_1(t) = \operatorname{sen} \omega_1 t, \quad (g_1, x_1) = \int_{-T}^{T} \operatorname{sen}^2 \omega_1 t \, dt = T.$$

La segunda función $g_2(t)$, ortogonal con respecto a la primera función coordenada $x_2(t)$, la buscamos en la forma $g_2(t) = b_{21} g_1(t) + f_2(t)$. El coeficiente b_{21} lo determinamos de la condición de biortogonalidad de $g_2(t)$ con respecto a $x_1(t)$. Como resultado obtenemos $b_{21} = 0$ y

$$g_2(t) = \cos \omega_1 t, \quad (g_2, x_2) = \int_{T}^{T} \cos^2 \omega_1 t \, dt = T.$$

Luego suponemos que sea $g_3(t) = b_{31}g_1(t) + b_{32}g_2(t) + f_3(t)$ y buscamos los coeficientes b_{31} y b_{32} de la condición de ortogonalidad de $g_3(t)$ con respecto a $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Como resultado hallamos

$$g_3(t) = -\frac{8}{3\pi}\operatorname{sen}\omega_1 t + \operatorname{sen}\omega_2 t, \quad (g_3, x_3) = T\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right).$$

Suponiendo que $g_4(t) = b_{41}g_1(t) + b_{42}g_2(t) + b_{43}g_3(t) + f_4(t)$ y determinados los coeficientes b_{41}, b_{42} y b_{43} de la condición de ortogonalidad de $g_4(t)$ con respecto a $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$, hallamos

$$g_4(t) = -\frac{4}{3\pi}\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t, \quad (g_4, x_4) = T\left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\right).$$

Una vez determinadas las funciones $g_\nu(t)$, suponemos, conforme al método expuesto, que $a_1(t) = c_{11}g_1(t) + c_{12}g_2(t) + c_{13}g_3(t) + c_{14}g_4(t)$ y hallamos el coeficiente c_{11} de la condición de que la magnitud (a_1, x_1) es igual a la unidad y los coeficientes c_{12}, c_{13} y c_{14} de la condición de ortogonalidad de la función $a_1(t)$ con respecto a $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $x_4(t)$. Como resultado obtendremos

$$a_1(t) = \frac{3\pi}{T(9\pi^2 - 64)}(3\pi\operatorname{sen}\omega_1 t - 8\operatorname{sen}\omega_2 t).$$

Después de poner $a_2(t) = c_{22}g_2(t) + c_{23}g_3(t) + c_{24}g_4(t)$ y determinar el coeficiente c_{22} de la condición $(a_2, x_2) = 1$ y los coeficientes c_{23} y c_{24} de la condición de ortogonalidad de la función $a_2(t)$ con respecto a $x_3(t)$ y $x_4(t)$, hallamos

$$a_2(t) = \frac{3\pi}{T(9\pi^2 - 16)}(3\pi\cos\omega_1 t - 4\cos\omega_2 t).$$

Una vez puesto $a_3(t) = c_{33}g_3(t) + c_{34}g_4(t)$ y determinado el coeficiente c_{33} de la condición $(a_3, x_3) = 1$ y el coeficiente c_{34} de la condición de ortogonalidad de $a_3(t)$ con respecto a $x_4(t)$, obtendremos

$$a_3(t) = -\frac{3\pi}{T(9\pi^2 - 64)}(8\operatorname{sen}\omega_1 t - 3\pi\operatorname{sen}\omega_2 t).$$

Por fin, poniendo $a_4(t) = c_{44}g_4(t)$ y habiendo determinado el coeficiente c_{44} de la condición $(a_4, x_4) = 1$, obtendremos

$$a_4(t) = -\frac{3\pi}{T(9\pi^2 - 16)}(4\cos\omega_1 t - 3\pi\cos\omega_2 t).$$

Le dejamos al lector que por sí mismo compruebe que las magnitudes aleatorias

$$U_1 = \int_{-T}^{T} X^0(t)\operatorname{sen}\omega_1 t\,dt, \quad Z_1 = \int_{-T}^{+T} X^0(t)\cos\omega_1 t\,dt,$$

$$U_2 = \int_{-T}^{T} X^0(t)\operatorname{sen}\omega_2 t\,dt, \quad Z_2 = \int_{-T}^{T} X^0(t)\cos\omega_2 t\,dt$$

no son correlacionadas; con ello, las magnitudes U_1 y Z_1 tienen la dispersión D_1 y las magnitudes U_2 y Z_2, la dispersión D_2.

§ 6.5. Representación canónica integral de una función aleatoria

Sea $V(\lambda)$ un ruido blanco arbitrario:

$$\left.\begin{aligned} &M[V(\lambda)] = 0, \\ &K_v(\lambda, \lambda') = M[V(\lambda)\overline{V(\lambda')}] = G(\lambda)\delta(\lambda - \lambda'), \end{aligned}\right\} \qquad (6.5.1)$$

donde $G(\lambda)$ es la intensidad del ruido blanco. Hallemos las condiciones en que la función aleatoria $X(t)$ puede ser expresada por medio de este ruido blanco $V(\lambda)$ por la integral (6.1.5). Para esto hallemos la función correlativa recíproca de la función aleatoria $X(t)$ y del ruido blanco $V(\lambda)$, suponiendo que la función aleatoria $X(t)$ se expresa por la representación canónica integral (6.1.5). Aplicando (4.7.4) para la función correlativa recíproca y la integral de ella, obtendremos para todos los valores de λ en el intervalo $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

$$K_{xv}(t, \lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x(t, \mu) G(\lambda) \delta(\lambda - \mu)\, d\mu = G(\lambda) x(t, \lambda). \qquad (6.5.2)$$

De aquí se deriva que la función coordenada $x(t; \lambda)$, para cada valor dado del parámetro λ, debe expresarse por la fórmula

$$x(t, \lambda) = \frac{K_{xv}(t, \lambda)}{G(\lambda)} = \frac{1}{G(\lambda)} M[X^0(t)\overline{V(\lambda)}]. \qquad (6.5.3)$$

El segundo procedimiento posible de deducción de esta fórmula es semejante al procedimiento de deducción de la fórmula (6.2.5). Escribamos la igualdad (6.1.5) en la forma

$$X^0(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda)\, x(t, \lambda)\, d\lambda, \qquad (6.5.4)$$

multipliquémosla por la función aleatoria $\overline{V(\mu)}$ y tomemos la esperanza matemática de los miembros derecho e izquierdo de la igualdad obtenida. Entonces, en virtud de (6.5.1) obtendremos

$$M[X^0(t)\overline{V(\mu)}] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M[V(\lambda)\overline{V(\mu)}]\, x(t, \lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x(t, \lambda) G(\lambda) \delta(\lambda - \mu)\, d\lambda = G(\mu) x(t, \mu). \qquad (6.5.5)$$

Es precisamente de aquí de donde obtenemos la fórmula (6.5.3). La fórmula (6.5.3) muestra que el ruido blanco $V(\lambda)$ debe ser correlacionado con la función aleatoria dada $X(t)$. El ruido blanco $V(\lambda)$ correlacionado con la función aleatoria $X(t)$ conviene buscarlo en

la misma forma en que buscamos las magnitudes aleatorias no correlacionadas V_ν al hallar la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ en el § 6.2. Para esto tomemos cierta función $a(t, \lambda)$ dependiente del parámetro λ y vamos a buscar el ruido blanco en la forma

$$V(\lambda) = \int_\alpha^\beta \overline{a(t, \lambda)}\, X^0(t)\, dt. \qquad (6.5.6)$$

Hallemos las condiciones que debe satisfacer la función $a(t, \lambda)$ para que la función $V(\lambda)$ sea un ruido blanco. Para hallar estas condiciones, sustituyamos la expresión del ruido blanco (6.5.6) en la fórmula para las funciones coordenadas (6.5.3). Entonces obtendremos

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} M[X^0(t)\, \overline{V(\lambda)}] =$$

$$= \frac{1}{G(\lambda)} \int_\alpha^\beta a(t', \lambda)\, M[X^0(t)\, \overline{X^0(t')}]\, dt' =$$

$$= \frac{1}{G(\lambda)} \int_\alpha^\beta a(t', \lambda)\, K_x(t, t')\, dt'. \qquad (6.5.7)$$

De este modo, hemos recibido la siguiente fórmula para las funciones coordenadas:

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} \int_\alpha^\beta a(t', \lambda)\, K_x(t, t')\, dt'. \qquad (6.5.8)$$

Como vemos, esta fórmula se semeja mucho a la (6.2.8) para las funciones coordenadas de la descomposición canónica; sólo que en vez del número ν en ella figura el parámetro ininterrumpidamente variable λ. Así pues, hemos recibido una condición que deben satisfacer las funciones $a(t, \lambda)$ y $x(t, \lambda)$. Sin embargo, la condición (6.5.8) no es suficiente para que la función aleatoria $V(\lambda)$ sea un ruido blanco. Para obtener una condición adicional a la cual la función $V(\lambda)$ será ruido blanco, multipliquemos la fórmula (6.5.6) por $\overline{V(\lambda')}$ y tomemos la esperanza matemática de la expresión obtenida. Entonces hallaremos

$$K_v(\lambda, \lambda') = M[V(\lambda)\, \overline{V(\lambda')}] = \int_\alpha^\beta \overline{a(t, \lambda)}\, M[X^0(t)\, \overline{V(\lambda')}]\, dt \qquad (6.5.9)$$

o bien, teniendo en cuenta (6.5.3),

$$K_v(\lambda, \lambda') = \int_\alpha^\beta \overline{a(t, \lambda)}\, G(\lambda')\, x(t, \lambda')\, dt =$$

$$= G(\lambda') \int_\alpha^\beta \overline{a(t, \lambda)}\, x(t, \lambda')\, dt. \qquad (6.5.10)$$

Comparando esta fórmula con la segunda fórmula (6.5.1), vemos que para que la función aleatoria $V(\lambda)$ sea un ruido blanco, es necesario que las funciones $a(t, \lambda)$ y $x(t, \lambda)$ satisfagan la condición

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(t, \lambda)}\, x(t, \lambda')\, dt = \delta(\lambda - \lambda'). \qquad (6.5.11)$$

Esta condición es el análogo de la de biortogonalidad (6.2.12). Para distintos valores de λ y λ' la integral del producto de las funciones $x(t, \lambda)$, $a(t, \lambda')$ debe ser igual a cero, es decir las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda')$ deben ser ortogonales.

Hemos visto en el caso de descomposición canónica que para cualquier función aleatoria se puede siempre hallar las funciones $x_v(t)$ y $a_v(t)$ que satisfacen las condiciones (6.2.8) y (6.2.12), mientras que en el caso de representación canónica integral no existe un método general de determinación de las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$ que satisfacen las condiciones (6.5.8) y (6.5.11). A continuación aportaremos una serie de ejemplos cuando se puede hallar fácilmente tales funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$.

Las condiciones (6.5.8) y (6.5.11) son necesarias para que la función aleatoria $V(\lambda)$, determinada por la fórmula (6.5.6), sea un ruido blanco y para que la función aleatoria $X(t)$ pueda ser expresada en función de este ruido blanco por medio de la representación canónica integral. Es evidente que estas condiciones son suficientes para que la función aleatoria $V(\lambda)$, determinada por la fórmula (6.5.6), sea un ruido blanco. Demostremos que las condiciones (6.5.8) y (6.5.11) junto con la condición

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \overline{a(t, \lambda)}\, x(t', \lambda)\, d\lambda = \delta(t - t') \qquad (6.5.12)$$

son suficientes también para que la función $X(t)$ sea expresada por la representación canónica integral (6.1.5). Para esto calculemos en el segundo miembro de la fórmula (6.5.4) la integral y demostremos que, al cumplir las condiciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12), ésta es igual a la función aleatoria centrada $X^0(t)$. En virtud de las fórmulas (6.5.6) y (6.5.12) tenemos

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda)\, x(t, \lambda)\, d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(t', \lambda)}\, X^0(t')\, dt' \right\} x(t, \lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} X^0(t') \left\{ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \overline{a(t', \lambda)}\, x(t, \lambda)\, d\lambda \right\} dt' =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} X^0(t')\, \delta(t - t')\, dt' = X^0(t). \qquad (6.5.13)$$

De este modo, hemos demostrado que las tres condiciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12) son suficientes para que la función aleatoria $V(\lambda)$, determinada por la fórmula (6.5.6), sea un ruido blanco y para que la función aleatoria $X(t)$ se exprese en función de este ruido blanco por la representación canónica integral (6.1.5).

Ejemplo 6.5.1. En el ejemplo 4.6.2 hallamos que la derivada de la función aleatoria $X(t)$ con la función correlativa $De^{-\alpha|t-t'|}$ tiene la función correlativa de la forma [véase la fórmula (4.6.17)]

$$K_{y_1}(t, t') = 2D\alpha\delta(t-t') - D\alpha^2 e^{-\alpha|t-t'|}.$$

Ahora bien, en este caso la función correlativa contiene el sumando $2D\alpha\delta(t-t')$ que es la función correlativa del ruido blanco. Sin embargo, la propia derivada $X'(t)$ no es ruido blanco, puesto que en su función correlativa hay todavía el sumando $D\alpha^2 e^{-\alpha|t-t'|}$. Puesto que este sumando tiene la misma forma que la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$, es natural suponer que se puede hallar una combinación tal de la función aleatoria $X(t)$ y de su derivada $X'(t)$, que sea un ruido blanco puro. Examinemos la suma

$$V(t) = \alpha X(t) + X'(t). \tag{6.5.14}$$

Su función correlativa, como función correlativa de la suma de dos funciones aleatorias, es igual a la suma de las funciones correlativas y correlativas recíprocas de los sumandos, es decir,

$$K_v(t, t') = K_{y_1}(t, t') + \alpha^2 K_x(t, t') + \alpha K_{xy_1}(t, t') + \alpha K_{xy_1}(t', t). \tag{6.5.15}$$

Observemos ahora que, en virtud de (4.6.14), para cualesquiera t y t'

$$K_{xy_1}(t, t') + K_{xy_1}(t', t) = 0. \tag{6.5.16}$$

En efecto, al permutar los argumentos t y t', las expresiones (4.6.14) pasan una a la otra, puesto que con ello el signo de desigualdad entre el primero y el segundo argumento cambia en el opuesto. La suma de cualquiera de las expresiones (4.6.14) con otra expresión, que tiene los argumentos t y t' permutados, es igual a cero, que es lo que demuestra la igualdad (6.5.16). Sustituyendo las expresiones de las funciones correlativas en (6.5.15) y teniendo en cuenta (6.5.16), obtendremos

$$K_v(t, t') = 2D\alpha\delta(t-t'). \tag{6.5.17}$$

Ahora bien, la función aleatoria $V(t) = \alpha X + X'$, determinada por la fórmula (6.5.14), representa en este caso un ruido blanco con intensidad igual a $2D\alpha$. Con otras palabras, la función aleatoria examinada $X(t)$ está ligada con el ruido blanco $V(t)$, que tiene la intensidad $2D\alpha$, por la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$X' + \alpha X = V(t). \tag{6.5.18}$$

Integrando esta ecuación, para la condición inicial $X(t_0) = 0$, obtendremos

$$X(t) = e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} V(\tau)\, e^{\alpha\tau}\, d\tau.$$

Transformemos esta expresión. Introduzcamos el multiplicador $e^{-\alpha\tau}$ bajo el signo integral y extendamos el límite superior de integración hasta cierto $t_1 > t$, al multiplicar la función subintegral por la función unidad escalonada $1(t-\tau)$,

igual a cero para $\tau > t$:

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} V(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t-\tau)} 1(t-\tau)\, V(\tau)\, d\tau. \qquad (6.5.19)$$

Esta expresión contiene la constante arbitraria t_0. Para determinar esta constante hallemos la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$. Aplicando la fórmula (4.7.3) para la función correlativa de la integral de la función aleatoria y teniendo en cuenta que en este caso

$$g(t, \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)} \quad 1(t-\tau),$$

obtendremos

$$K_x(t, t') = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} 2\alpha D e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\alpha(t'-\tau)} 1(t-\tau)\, 1(t'-\tau)\, \delta(\tau-\tau')\, d\tau\, d\tau' =$$

$$= 2\alpha D \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t+t'-2\tau)} 1(t-\tau)\, 1(t'-\tau)\, d\tau.$$

Primeramente examinemos el caso cuando $t < t'$. Tendremos

$$K_x(t, t') = 2\alpha D \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t+t'-2\tau)}\, d\tau = D\left[e^{-\alpha(t'-t)} - e^{-\alpha(t+t'-2t_0)}\right].$$

Cuando $t > t'$, en virtud de la simetría podemos escribir

$$K_x(t, t') = D\left[e^{-\alpha(t-t')} - e^{-\alpha(t'+t-2t_0)}\right].$$

Reuniendo estas fórmulas, obtendremos

$$K_x(t, t') = D\left[e^{-\alpha|t-t'|} - e^{-\alpha(t+t'-t_0)}\right]. \qquad (6.5.20)$$

De aquí se ve que la función aleatoria $X(t)$ con la función correlativa $De^{-\alpha|t-t'|}$ se expresa por medio del ruido blanco $V(t)$, cuya intensidad es $2D\alpha$, por la fórmula (6.5.19) si se pone $t_0 = -\infty$:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t_1} V(\tau)\, e^{-\alpha(t-\tau)} 1(t-\tau)\, d\tau \qquad (t < t_1). \qquad (6.5.21)$$

Así pues, la función aleatoria estacionaria con función correlativa exponencial se expresa por la representación canónica integral (6.5.21) en un intervalo semiinfinito cualquiera $(-\infty, t_1)$. Las funciones coordenadas de esta representación canónica integral se determinan por la fórmula

$$x(t, \lambda) = e^{-\alpha(t-\lambda)} \quad 1(t-\lambda). \qquad (6.5.22)$$

Para hallar las funciones $a(t, \lambda)$, observemos que la fórmula (6.5.14), en la cual el ruido blanco $V(\lambda)$ va expresado mediante la función aleatoria $X(t)$, puede ser escrita en la forma

$$V(\lambda) = \int_{-\infty}^{t_1} [\delta'(\lambda-t) + \alpha\delta(\lambda-t)]\, X(t)\, dt \qquad (\lambda < t_1).$$

De aquí se ve que

$$a(t, \lambda) = \delta'(\lambda - t) + \alpha\delta(\lambda - t). \qquad (6.5.23)$$

En el ejemplo que sigue veremos que las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$, determinadas por las fórmulas (6.5.22) y (6.5.23), satisfacen las tres condiciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12).

Ejemplo 6.5.2. Los resultados del ejemplo anterior muestran que la función aleatoria no estacionaria $X(t)$ con la función correlativa (6.5.20) se expresa por la representación canónica integral (6.5.19) en el intervalo finito (t_0, t_1). Con ello, las funciones coordenadas $x(t, \lambda)$ y las funciones $a(t, \lambda)$ van expresadas por las mismas fórmulas (6.5.22) y (6.5.23).

Es fácil cerciorarse de que en este caso las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$ satisfacen las tres ecuaciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12). En efecto, para $t_0 < t < \lambda < t_1$

$$\int_{t_0}^{t_1} K_x(t, t')\, a(t'\lambda)\, dt' =$$

$$= D\int_{t_0}^{t_1} [e^{-\alpha(t'-t)} - e^{-\alpha(t+t'-2t_0)}][\delta'(\lambda - t') + \alpha\delta(\lambda - t')\, dt' =$$

$$= -D\alpha[e^{-\alpha(\lambda-t)} - e^{-\alpha(t+\lambda-2t_0)}] + D\alpha[e^{-\alpha(\lambda-t)} - e^{-\alpha(t+\lambda-2t_0)}] = 0.$$

Para $t_0 < \lambda < t < t_1$ obtendremos

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t', \lambda)\, K_x(t, t')\, dt' =$$

$$= D\int_{t_0}^{t} [e^{-\alpha(t-t')} - e^{-\alpha(t+t'-2t_0)}][\delta'(\lambda - t') + \alpha\delta(\lambda - t')]\, dt' =$$

$$= D\alpha[e^{-\alpha(t-\lambda)} + e^{-\alpha(t+\lambda-2t_0)}] + D\alpha[e^{-\alpha(t-\lambda)} - e^{-\alpha(t+\lambda-2t_0)}] = 2D\alpha e^{-\alpha(t-\lambda)}.$$

Al dividir las expresiones obtenidas por la intensidad del ruido blanco $V(\lambda)$, igual en este caso a $2D\alpha$, obtendremos precisamente la función $x(t, \lambda)$ determinada por la fórmula (6.5.22). Así pues, las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$ satisfacen la condición (6.5.8). Luego tenemos

$$\int_{t_0}^{t} x(t, \lambda)\, \overline{a(t, \lambda')}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t-\lambda)} 1(t-\lambda)[\delta'(\lambda' - t) + \alpha\delta(\lambda' - t)\, dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda'}[e^{-\alpha(\lambda'-\lambda)} 1(\lambda' - \lambda)] + \alpha e^{-\alpha(\lambda'-\lambda)} 1(\lambda' - \lambda) =$$

$$= -\alpha e^{-\alpha(\lambda'-\lambda)} 1(\lambda' - \lambda) + e^{-\alpha(\lambda'-\lambda)}\delta(\lambda' - \lambda) +$$

$$+ \alpha e^{-\alpha(\lambda'-\lambda)} 1(\lambda' - \lambda) = e^{-\alpha(\lambda'-\lambda)}\delta(\lambda' - \lambda).$$

Pero $\delta(\lambda' - \lambda) = 0$ para todos los valores de $\lambda' \neq \lambda$. Por eso el multiplicador $e^{-\alpha(\lambda'-\lambda)}$ puede ser sustituido en la expresión obtenida por la unidad. Por consiguiente, las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$ satisfacen la condición (6.5.11). De un modo absolutamente análogo nos convencemos de que ellas satisfacen también la condición (6.5.12).

Ejemplo 6.5.3. Le dejamos al lector que por sí mismo se convenza de que si $X(t)$ es una función aleatoria estacionaria con la función correlativa

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0|\tau|\right),$$

entonces la función aleatoria

$$V(t) = X''(t) + 2\alpha X'(t) + \beta^2 X(t), \quad \beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2, \tag{6.5.24}$$

representa un ruido blanco con intensidad igual a $2D\alpha\beta^2$. Al examinar la igualdad (6.5.24) como ecuación diferencial con respecto a $X(t)$ y al integrarla, nos cercioramos de que la función aleatoria $X(t)$ se expresa a través del ruido blanco $V(\lambda)$ por la fórmula

$$X(t) = \frac{1}{\omega_0}\int_{-\infty}^{t_1} V(\lambda)\, e^{-\alpha(t-\lambda)}\operatorname{sen}\omega_0(t-\lambda)\,1(t-\lambda)\,d\lambda \quad (t < t_1). \tag{6.5.25}$$

Esta fórmula ofrece la representación canónica integral de la función aleatoria $X(t)$ con las funciones coordenadas

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{\omega_0}\, e^{-\alpha(t-\lambda)}\operatorname{sen}\omega_0(t-\lambda)\,1(t-\lambda). \tag{6.5.26}$$

Las funciones $a(t, \lambda)$ se determinan en este caso por la fórmula

$$a(t, \lambda) = \delta''(\lambda - t) + 2\alpha\delta'(\lambda - t) + \beta^2\delta(\lambda - t). \tag{6.5.27}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, uno puede convencerse de que las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$, determinadas por las fórmulas (6.5.26) y (6.5.27), satisfacen las condiciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12).

§ 6.6. Representación canónica integral de una función aleatoria estacionaria

En los §§ 5.2 y 5.3 construimos una clase de funciones aleatorias estacionarias representables por las descomposiciones espectrales (5.2.21) y (5.3.3). Dado que las funciones aleatorias $U(\omega)$, $Z(\omega)$ y $V(\omega)$ en estas fórmulas son ruidos blancos, la descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria es, al mismo tiempo, también su representación canónica integral. Aplicando la Teoría de representaciones canónicas integrales de funciones aleatorias, expuesta en el párrafo anterior, ahora podemos demostrar que cualquier función aleatoria estacionaria se expresa por la representación canónica integral (5.3.3). Este hecho ha quedado sin demostrar en los §§ 5.2 y 5.3. Al demostrarlo, podemos afirmar que la clase de funciones aleatorias estacionarias, construida en los §§ 5.2 y 5.3, incluye todas las funciones aleatorias estacionarias.

Para la demostración observemos que las funciones

$$x(t, \lambda) = e^{i\lambda t}, \quad a(t, \lambda) = \frac{1}{2\pi}\, e^{i\lambda t} \tag{6.6.1}$$

satisfacen las ecuaciones (6.5.11) y (6.5.12). En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\frac{1}{2\pi}\,e^{-i\lambda' t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\lambda')t}\,dt=\delta(\lambda-\lambda'),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\frac{1}{2\pi}\,e^{-i\lambda t'}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-t')\lambda}\,d\lambda=\delta(t-t')$$

[véase la fórmula (2.2.22) que ofrece la representación de la función delta en forma de la integral de Fourier].

Para cerciorarse de que las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$, determinadas por las fórmulas (6.6.1), satisfacen también la ecuación (6.5.8), basta demostrar que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_x(t-t')\,a(t',\lambda)\,dt'=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(t-t')\,e^{i\lambda t'}\,dt' \qquad (6.6.2)$$

se distingue de la función $x(t, \lambda) = e^{i\lambda t}$ solamente por el multiplicador independiente de t y tomar este multiplicador como función $G(\lambda)$. Efectuando en la integral (6.6.2) la sustitución de las variables $\tau = t - t'$, obtendremos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(t-t')\,e^{i\lambda t'}\,dt'=e^{i\lambda t}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\,e^{-i\lambda\tau}\,d\tau.$$

De aquí se ve que las funciones $x(t, \lambda)$ y a (t, λ), determinadas por las fórmulas (6.6.1), satisfacen la ecuación (6.5.8) cuando

$$G(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\,e^{-i\lambda\tau}\,d\tau. \qquad (6.6.3)$$

En virtud de lo demostrado en el párrafo anterior, la función aleatoria

$$V(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^0(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt \qquad (6.6.4)$$

representa un ruido blanco cuya intensidad es igual a $G(\lambda)$ y la función aleatoria $X(t)$ va expresada en función de este ruido blanco por la representación canónica integral

$$X(t)=m_x+\int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda. \qquad (6.6.5)$$

Esta fórmula difiere de (5.3.3) solamente por la designación de la frecuencia.

Comparando la fórmula (6.6.3) con la (5.3.11), nos convencemos de que la intensidad $G(\lambda)$ del ruido blanco $V(\lambda)$, determinado por la fórmula (6.6.4), coincide con la densidad espectral $s_x(\lambda)$ de la función aleatoria $X(t)$. Por fin, en virtud de la fórmula general (6.1.10), la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ se expresa por la representación canónica integral

$$k_x(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)\, e^{i\lambda t} e^{\overline{i\lambda t'}}\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda)\, e^{i\lambda(t-t')}\, d\lambda. \qquad (6.6.6)$$

Esta fórmula se distingue también de la (5.3.15) solamente por la designación de la frecuencia.

Ahora bien, hemos demostrado que cualquier función aleatoria estacionaria se expresa por la representación canónica integral (6.6.5) que coincide con su descomposición espectral (5.3.3).

Demostremos ahora que para ninguna función aleatoria no estacionaria la descomposición espectral puede ser su representación canónica integral. En efecto, supongamos que la función aleatoria no estacionaria $X(t)$ se expresa por la representación canónica integral (6.6.5). Entonces su función correlativa debe expresarse por la fórmula (6.6.6.), es decir, debe depender solamente de la diferencia de los argumentos, lo que contradice a la suposición acerca de la no estacionaridad de esta función aleatoria. Así pues, si se logra expresar una función aleatoria no estacionaria por la descomposición espectral (6.5.5), la función $V(\lambda)$ no puede ser un ruido blanco en esta descomposición. Esto quiere decir que la descomposición espectral de una función aleatoria no estacionaria la expresa solamente a través de otra función aleatoria $V(\lambda)$, que en el caso general no es más sencilla y no da nada para la práctica.

Examinemos ahora dos funciones aleatorias reales $X(t)$ e $Y(t)$ que son estacionarias y estacionariamente ligadas. Expresemos la función aleatoria $X(t)$ por la representación canónica integral (6.6.5) y la función aleatoria $Y(t)$, por la representación canónica integral

$$Y(t) = m_y + \int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda. \qquad (6.6.7)$$

En este caso el ruido blanco $V(\lambda)$ se expresará por la fórmula (6.6.4) y el ruido blanco $W(\lambda)$, por la fórmula semejante

$$W(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^0(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt. \qquad (6.6.8)$$

Calculemos la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(\lambda)$ y $W(\lambda)$. Para eso pasemos en (6.6.8) a las magnitudes conjugadas complejas y cambiemos las designaciones del argumento y de

la variable de integración. Entonces obtendremos

$$M[V(\lambda)\overline{W(\lambda')}] = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M[X^0(t)\,Y^0(t')]\,e^{i(\lambda' t' - \lambda t)}\,dt\,dt'$$

bien

$$K_{vw}(\lambda, \lambda') = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_{xy}(t-t')\,e^{i(\lambda' t' - \lambda t)}\,dt\,dt'.$$

La sustitución de las variables $t' = t - \tau$ en la integral con respecto t' da

$$K_{vw}(\lambda, \lambda') = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} k_{xy}(\tau)\,e^{-i\lambda\tau}\,d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda'-\lambda)t}\,dt.$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda'-\lambda)t}\,dt = 2\pi\delta(\lambda - \lambda').$$

Por consiguiente, introduciendo la designación

$$s_{xy}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_{xy}(\tau)\,e^{-i\lambda\tau}\,d\tau, \qquad (6.6.9)$$

obtendremos

$$K_{vw}(\lambda, \lambda') = s_{xy}(\lambda)\,\delta(\lambda - \lambda'). \qquad (6.6.10)$$

De este modo, hemos demostrado que la función correlativa recíproca de los ruidos blancos en las representaciones espectrales de dos cualesquiera funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas contiene como multiplicador la función delta. Esto quiere decir que los valores de estos ruidos blancos, correspondientes a diferentes valores de la frecuencia, no son correlacionados. En el § 5.6. hemos mostrado esto recurriendo a otros razonamientos.

CAPITULO 7

Entropía e información contenida en las magnitudes aleatorias

§ 7.1. Medición de la indeterminación de fenómenos aleatorios. Noción de entropía

Todo fenómeno aleatorio está vinculado con cierta indeterminación. El resultado de observación de un fenómeno aleatorio no puede ser predicho con plena seguridad, es decir, es indeterminado y se hace determinado solamente después de la observación. Por eso, al planificar trabajos relacionados con la observación de fenómenos aleatorios o al calcular sistemas destinados a funcionar con señales no conocidas de antemano, debemos tomar en consideración la indeterminación de los resultados de observación de los fenómenos aleatorios, tener en cuenta que los resultados de unas mismas acciones y pruebas pueden ser en el proceso de trabajo distintos. Cabe preguntar ¿se podría medir la indeterminación de fenómenos aleatorios y tenerla en cuenta en nuestros cálculos? Para resolver esta cuestión, prestemos atención al hecho de que en ciertos casos podemos comparar la indeterminación de los resultados de diferentes experimentos y decir con seguridad que la indeterminación de una prueba es mayor que la de otra. Así, por ejemplo, si, como resultado de una prueba, el acontecimiento A puede producirse o no producirse con la probabilidad de 1/2 y, como resultado de otra prueba, el acontecimiento B puede suceder con la probabilidad de 0,99,entonces está claro intuitivamente que la primera prueba posee mayor indeterminación que la segunda. En efecto, el resultado del primer experimento es absolutamente imposible predecir. Al contrario, prácticamente podemos estar seguros de que no nos equivocamos al predecir que, como resultado del segundo experimento, el acontecimiento B se producirá. Si en la tercera prueba el acontecimiento C tiene la probabilidad de 0,9 es evidente que esta prueba posee mayor indeterminación que la segunda y menor que la primera. Este ejemplo muestra claramente que la estimación cuantitativa de indeterminación de los resultados de observación de los fenómenos aleatorios es, en principio, posible.

Para hallar el modo de tratar la estimación cuantitativa de la indeterminación de los fenómenos aleatorios, imaginémonos que participando en cualquier trabajo, por ejemplo, en el mando de un proceso de producción, hemos efectuado cierto experimento. El resultado del mismo es necesario comunicárselo a otros participantes, para que puedan cumplir su parte del trabajo. Claro está que la comunica-

ción acerca del resultado de la prueba liquida por completo la indeterminación que existía antes de llevar a cabo el experimento.

Para transmitir las comunicaciones se utilizan generalmente los medios de enlace. La transmisión de comunicaciones se efectúa por las líneas de enlace con ayuda de determinadas señales. Por eso, para transmitir una comunicación, es necesario ponerle en correspondencia una sucesión determinada de señales o, como se dice, cifrar la comunicación. El código binario es el más sencillo. En éste la transmisión de comunicaciones se efectúa por señales de dos tipos. Al ligar con un tipo de señal el cero y con el otro, la unidad, reduciremos la codificación de la comunicación a su representación en forma de una sucesión de ceros y unidades que alternan de una manera determinada. Con ello, es necesario, naturalmente, asegurar que a distintas comunicaciones les correspondan diferentes sucesiones de ceros y unidades. Desde el punto de vista teórico, al cifrar comunicaciones, es necesario tratar de gastar con mayor economía el tiempo y los medios requeridos para su transmisión. Esto se puede alcanzar eligiendo tal procedimiento de codificación con el cual sea mínimo el número esperable de signos (señales) con ayuda de los cuales se transmiten las comunicaciones. Es obvio que para asegurar el número mínimo esperable de signos para la transmisión de las comunicaciones acerca del resultado de la prueba en cuestión, es necesario representar los resultados de mayor probabilidad por las sucesiones más cortas de ceros y unidades y los de menor probabilidad, ligarlos con sucesiones más largas.

El posible número mínimo esperable de signos requerido para liquidar por completo la indeterminación del resultado de la prueba, al emplear el procedimiento más económico de codificación, conviene tomarlo por medida cuantitativa de la indeterminación del experimento. Con ello, la unidad de indeterminación será un dígito binario (en forma abreviada bit) *).

Para realizar prácticamente el procedimiento de codificación más económico, con el cual la esperanza matemática del número de dígitos binarios necesarios para transmitir la comunicación sobre el resultado de la prueba sea mínima, se procede del modo siguiente. Todos los resultados posibles del experimento se dividen en dos grupos de manera que la probabilidad sumaria de los resultados de cada grupo sea lo más próxima a la mitad. A un grupo se le asigna el primer dígito binario; el cero, y al otro, la unidad. Luego cada grupo se divide en dos subgrupos de modo que la probabilidad sumaria de los resultados de cada subgrupo sea lo más próxima a un cuarto. De tal manera se continúa la división de los subgrupos hasta que se obtenga el subgrupo que contenga sólo un resultado del experimento. Los

*) «Bit» es una abreviatura del término inglés «binary digit» que significa en español «dígito binario».

subgrupos que contienen más de un resultado se siguen dividiendo. Al fin y al cabo todos los subgrupos contendrán cada uno un resultado y, con ello, a los resultados más probables les corresponderá menor cantidad de dígitos binarios y a los resultados menos probables, una cantidad mayor de los mismos.

Ejemplo 7.1.1. Si son posibles ocho resultados del experimento con las probabilidades 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/64, 1/64, 1/64, 1/64, entonces, aplicando el procedimiento expuesto de codificación, obtendremos la tabla siguiente:

i	p_i	Díg. 1	Díg. 2	Díg. 3	Díg. 4	Díg. 5	Díg. 6
1	$\frac{1}{2}$	0					
2	$\frac{1}{4}$	1	0				
3	$\frac{1}{8}$	1	1	0			
4	$\frac{1}{16}$	1	1	1	0		
5	$\frac{1}{64}$	1	1	1	1	0	0
6	$\frac{1}{64}$	1	1	1	1	0	1
7	$\frac{1}{64}$	1	1	1	1	1	0
8	$\frac{1}{64}$	1	1	1	1	1	1

Ahora bien, la comunicación sobre el resultado más probable del experimento, que tiene la probabilidad de 1/2, se transmitirá por un solo dígito binario 0; la comunicación sobre el segundo resultado del experimento, que tiene la probabilidad de 1/4, se transmitirá por dos dígitos 1 y 0; la comunicación del tercer resultado, que tiene la probabilidad de 1/8, se transmitirá por tres dígitos; la comunicación sobre el cuarto resultado que tiene la probabilidad de 1/16, se transmitirá por cuatro dígitos y las comunicaciones acerca de cada uno de los demás resultados, cuyas probabilidades son iguales a 1/64, se transmitirán por seis dígitos.

Hallemos la indeterminación del experimento en cuestión, la cual, según la definición anteriormente dada, es igual a la esperanza matemática del número de dígitos requeridos para transmitir la comunicación sobre el resultado de la prueba. Los valores posibles del número de signos que puede comprender la comunicación sobre el resultado de la prueba son 1, 2, 3, 4 y 6. Las probabilidades de estos valores son iguales, respectivamente, a 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 y $4 \cdot 1/64 = 1/16$. Por eso la esperanza matemática del número de dígitos que puede com-

prender la comunicación sobre el resultado de la prueba es igual

$$H = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{1}{16} = 2 \text{ bits.}$$

Así pues, la indeterminación del experimento en cuestión es igual a 2 bits.

Ejemplo 7.1.2. Si son posibles ocho resultados del experimento y la probabilidad de cada uno de ellos es igual a 1/8, entonces el procedimiento expuesto de codificación de las comunicaciones acerca de los resultados del experimento lo ofrece la tabla siguiente:

i	p_i	Díg. 1	Díg. 2	Dig. 3
1	$\frac{1}{8}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	0	0	1
3	$\frac{1}{8}$	0	1	0
4	$\frac{1}{8}$	0	1	1
5	$\frac{1}{8}$	1	0	0
6	$\frac{1}{8}$	1	0	1
7	$\frac{1}{8}$	1	1	0
8	$\frac{1}{8}$	1	1	1

Ahora bien, la comunicación sobre cualquier resultado del experimento se transmite en este caso por tres dígitos. Y esto era de esperar, puesto que todos los resultados de la prueba son equiprobables. La esperanza matemática del número de dígitos comprendidos en la comunicación es también igual a tres. Por lo tanto, la indeterminación del experimento en cuestión es igual a 3 *bits*.

Examinemos el experimento con n resultados posibles cuyas probabilidades son todas iguales a potencias enteras de una mitad. Es fácil comprender que, al emplear el procedimiento de codificación expuesto, al resultado de la prueba cuya probabilidad es 2^{-m} le corresponderá m dígitos binarios, lo que evidencian claramente los ejemplos citados. Así, pues, la esperanza matemática del número de dígitos comprendidos en la comunicación sobre el resultado del experimento en cuestión es igual a

$$H = \sum m 2^{-m}, \qquad (7.1.1)$$

donde la adición se realiza con respecto a todos los resultados posibles de la prueba. En este caso, está claro que si ciertos resultados del experimento tienen probabilidades iguales, les corresponderán sumandos iguales. Observemos ahora que en el caso en cuestión, en que la probabilidad del i-ésimo resultado de la prueba $p_i = 2^{-m_i}$, el número de dígitos comprendidos en la comunicación acerca de este resultado del experimento es igual al logaritmo binario de su probabilidad tomado con el signo contrario: $m_i = -^2 \log p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Por eso la fórmula (7.1.1) se puede escribir en la forma

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i {}^2\log p_i. \tag{7.1.2}$$

Esta magnitud, obtenida por nosotros para el caso particular cuando las probabilidades de todos los resultados del experimento se expresan por potencias enteras de una mitad, se toma por medida cuantitativa de indeterminación de cualquier prueba con un número finito de resultados posibles y se llama *entropía* del experimento. En vez de experimento, se puede hablar de un sistema con número finito de estados posibles que tienen probabilidades asignadas de antemano. La entropía de este sistema, determinada por la fórmula (7.1.2), es la medida de indeterminación del sistema. Claro está que en la definición de la entropía (7.1.2) se tienen en cuenta todos los resultados posibles del experimento, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{7.1.3}$$

La entropía de un experimento con un número finito $n > 1$ de resultados (o de un sistema con un número finito de estados posibles) es siempre positiva, puesto que los logaritmos de fracciones propias son negativos. Si la prueba tiene un solo resultado posible cuya probabilidad es igual a la unidad, entonces la entropía de la prueba es igual a cero. Esto es natural ya que el experimento con un solo resultado posible carece por completo de indeterminación. Demostremos que entre todos los experimentos posibles, con n resultados posibles, la mayor entropía la poseen los experimentos de resultados equiprobables. Para la demostración, deduzcamos una desigualdad auxiliar que necesitaremos más de una vez a continuación. Observemos que para cualesquiera valores positivos de x

$$\ln x \leqslant x - 1. \tag{7.1.4}$$

En efecto, el logaritmo es una función monótona creciente con derivada monótona decreciente. Por consiguiente, se representa por una curva, cuya convexidad está dirigida hacia arriba, que se encuentra por completo bajo cualquier tangente a ella (fig. 7.1.1.). En particular, la curva que representa al logaritmo natural se halla por com-

pleto bajo la tangente a ella en el punto $x = 1$ que tiene la ecuación $y = x - 1$. Precisamente de aquí se deduce la desigualdad (7.1.4). El signo de igualdad en (7.1.4) tiene lugar solamente cuando $x = 1$. Poniendo $x = 1/u$, obtendremos

$$\ln \frac{1}{u} \leqslant \frac{1}{u} - 1.$$

de donde

$$\ln u = -\ln \frac{1}{u} \geqslant 1 - \frac{1}{u}.$$

Ahora bien, para cualesquiera valores positivos de u

$$\ln u \geqslant 1 - \frac{1}{u}. \qquad (7.1.5)$$

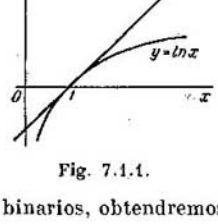


Fig. 7.1.1.

Pasando aquí de los logaritmos naturales a los binarios, obtendremos

$$^2\log u \geqslant \left(1 - \frac{1}{u}\right)^2 \log e. \qquad (7.1.6)$$

Esto es precisamente la desigualdad auxiliar buscada.

En virtud de la definición (7.1.2), la entropía de un experimento con n resultados equiprobables es

$$H_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \, ^2\log \frac{1}{n} = {}^2\log n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = {}^2\log n. \qquad (7.1.7)$$

Observemos ahora que las probabilidades iguales de $1/n$, que constituyen en suma la unidad, pueden ser sustituidas en (7.1.7) por otras probabilidades cualesquiera $p_1, p_2, \ldots p_n$ que constituyen en total la unidad. Entonces la entropía de un experimento con n resultados equiprobables se expresará por la fórmula

$$H_p = {}^2\log n \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \, ^2\log n.$$

Restando de esta expresión la (7.1.2) de la entropía de un experimento con n resultados que tienen las probabilidades $p_1, \ldots, p_n$, tendremos

$$H_p - H = \sum_{i=1}^{n} p_i \, ^2\log n p_i.$$

De aquí, aplicando la desigualdad (7.1.6), obtenemos

$$H_p - H \geqslant {}^2\log e \sum_{i=1}^{n} p_i \left(1 - \frac{1}{np_i}\right) = {}^2\log e \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Esto demuestra que la entropía de un experimento con resultados equiprobables no puede ser menor que la de otro experimento cual-

quiera con el mismo número de resultados posibles. Como el signo de igualdad en (7.1.6) tiene lugar solamente para $u = 1$, la entropía de un experimento con resultados equiprobables siempre es mayor que la cualquier prueba que tiene el mismo número de resultados posibles pero diferentes probabilidades de los mismos.

Observemos todavía que, como muestra la fórmula (7.17), la entropía de un experimento con resultados equiprobables será tanto mayor cuanto mayor sea el número de resultados posibles del mismo.

Todas las propiedades examinadas de la entropía se concuerdan plenamente con nuestras ideas intuitivas acerca de la indeterminación de los resultados de observación de fenómenos aleatorios.

§ 7.2. Entropía de una magnitud aleatoria. Entropía condicional media

Extendamos ahora la definición de entropía, dada en el párrafo anterior, al caso de un conjunto infinito de resultados posibles de un experimento. Para esto introduzcamos la noción de entropía de una magnitud aleatoria. Examinemos primeramente una magnitud aleatoria discontinua X cuyos posibles valores $x_1, \ldots, x_n$ tienen las probabilidades que son iguales a $p_1, \ldots, p_n$, respectivamente. El experimento tiene en este caso n resultados posibles y las probabilidades de éstos son iguales a las de los valores correspondientes de la magnitud aleatoria X. Tomemos la entropía de este experimento por la de la magnitud aleatoria discontinua X. De este modo, la entropía de una magnitud aleatoria discontinua representa la suma, tomada con signo contrario, de probabilidades de todos sus valores posibles multiplicados por los logaritmos de estas probabilidades:

$$H[X] = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i. \tag{7.2.1}$$

Para determinar la entropía de una magnitud aleatoria continua X, dividamos el dominio de sus valores posibles en un número finito de intervalos $I_1, \ldots, I_n$ y tomaremos por el i-ésimo resultado del experimento el encuentro del valor de la magnitud aleatoria X en el i-ésimo intervalo. Las probabilidades de estos resultados del experimento serán

$$p_i \int_{I_i} f(x)\, dx = f(x_i)\, \Delta x_i, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{7.2.2}$$

donde x_i es cierto valor medio de x en el i-ésimo intervalo, Δx_i es la longitud del i-ésimo intervalo y $f(x)$ es la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria X que se supone ser continua en cada uno de

los intervalos $I_1, \ldots, I_n$. La entropía del experimento, en virtud de la definición (7.1.2), será

$$H = -\sum_{i=1}^{n} [f(x_i)\,\Delta x_i]\,{}^2\log [f(x_i)\,\Delta x_i] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,[{}^2\log f(x_i) + {}^2\log \Delta x_i]\,\Delta x_i$$

o bien

$$H = -\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,{}^2\log f(x_i)\,\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,({}^2\log \Delta x_i)\,\Delta x_i. \quad (7.2.3)$$

En esta fórmula el paso directo al límite para $\Delta x_i \to 0$ es imposible, puesto que en este caso el segundo sumando crece ilimitadamente. Para vencer este obstáculo, observemos que en los problemas prácticos nos interesa generalmente no la indeterminación absoluta de cualquier magnitud aleatoria sino solamente en cuánto su indeterminación es mayor o menor que la de otra magnitud o bien en cuánto ha disminuido la indeterminación de la magnitud aleatoria en cuestión como resultado de uno u otro experimento. Y como las diferencias de las entropías no cambian al transferir arbitrariamente su origen, entonces el segundo sumando del segundo miembro de la fórmula (7.2.3) se puede sustituir por la magnitud constante arbitraria H_0. Entonces la entropía del experimento en cuestión se determinará por la fórmula

$$H = H_0 - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,{}^2\log f(x_i)\,\Delta x_i.$$

En esta fórmula se puede pasar al límite al aumentar ilimitadamente el número de intervalos en el que se divide el dominio de valores posibles de la magnitud aleatoria X y al tender a cero las longitudes de todos los intervalos. Entonces la suma pasará a la integral y obtendremos

$$H = H_0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,{}^2\log f(x)\,dx. \quad (7.2.4)$$

Comúnmente, para sencillez, se supone que $H_0 = 0$ y se determina la entropía de una magnitud aleatoria continua X por la fórmula

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,{}^2\log f(x)\,dx. \quad (7.2.5)$$

Observemos ahora que la integral en (7.2.4) y (7.2.5) es la esperanza matemática de la función ${}^2\log f(X)$ de la magnitud aleatoria X. Por eso la definición (7.2.5) de entropía de una magnitud aleatoria

continua se puede escribir también en la forma

$$H = -M\,[^2\log f(X)]. \tag{7.2.6}$$

Puesto que el origen de la entropía ha sido cambiado arbitrariamente al deducir las fórmulas (7.2.4) y (7.2.5), la entropía de una magnitud aleatoria continua puede ser tanto positiva como negativa. Análogamente al pasar de la escala termométrica absoluta, por ejemplo, a la centígrada, obtendremos los valores de temperatura tanto positivos como negativos.

La fórmula (7.2.6) determina tanto la entropía de una magnitud aleatoria continua escalar como la de un vector aleatorio cuyas componentes son magnitudes aleatorias continuas. La fórmula (7.2.5) puede servir también para la determinación de la entropía de un vector aleatorio continuo, si la variable x se entiende como vector (es decir, como un conjunto de varias variables) y la integral, como integral múltiple extendida a todo el dominio de valores posibles del vector aleatorio X. En forma desarrollada esta fórmula se escribirá así:

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\,{}^2\log f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n. \tag{7.2.7}$$

Es fácil comprender que la entropía de una magnitud aleatoria depende solamente de la distribución de las probabilidades de sus valores y no depende de la disposición de esta distribución con respecto al origen de coordenadas. En efecto, la integral (7.2.5) no cambiará si en ella se efectúa la sustitución de la variable $x = y - a$. Esto quiere decir que las magnitudes aleatorias X y $Y = X + a$ tienen la misma entropía para cualquier a. En particular, esto es válido cuando $a = -m_x$. De aquí se desprende que la entropía de cualquier magnitud aleatoria no depende de su esperanza matemática y es igual a la entropía de la magnitud aleatoria centrada correspondiente.

Ejemplo 7.2.1. La entropía de la distribución normal conforme a (7.2.5) es

$$H[X] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2D}}\left(-\frac{1}{2}\,{}^2\log 2\pi D - \frac{x^2}{2D}\,{}^2\log e\right)dx.$$

Pero

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2D}}dx = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2D}}dx = D.$$

Por lo tanto,

$$H[X] = \frac{1}{2}\,{}^2\log 2\pi D + \frac{1}{2}\,{}^2\log e = {}^2\log\sqrt{2\pi e D}.$$

Ejemplo 7.2.2. La entropía de la distribución uniforme, en virtud de (7.2.5), es

$$H[X] = -\int_a^b \frac{1}{b-a} {}^2\log \frac{1}{b-a}\, dx = {}^2\log(b-a).$$

Ejemplo 7.2.3. Para la distribución exponencial $f(x) = ke^{-kx}$ $(x > 0)$ la entropía se determina por la fórmula

$$H[X] = -\int_0^\infty ke^{-kx}\,({}^2\log k - kx\,{}^2\log e)\, dx.$$

Pero

$$\int_0^\infty ke^{-kx}\, dx = 1, \qquad \int_0^\infty x\, ke^{-kx}\, dx = M[X] = \frac{1}{k}.$$

Por consiguiente,

$$H[X] = -{}^2\log k + {}^2\log e = {}^2\log \frac{e}{k}.$$

Más adelante veremos que una importantísima tarea práctica es la estimación de la variación de la indeterminación de la magnitud aleatoria X después de efectuar el experimento como resultado del cual se hace conocido el valor de otra magnitud aleatoria Y. Intuitivamente está claro que la indeterminación de la magnitud aleatoria X disminuirá si las magnitudes X e Y son dependientes y permanecerá invariable si dichas magnitudes son independientes. A continuación veremos que esto es precisamente así para nuestra definición de la medida de indeterminación de una magnitud aleatoria.

Para estimar la indeterminación de la magnitud aleatoria X, que queda después de observar la magnitud aleatoria Y, conviene introducir la noción de entropía de la magnitud aleatoria X con respecto a la magnitud Y. Es evidente que para esto es suficiente sustituir en la fórmula (7.2.1) las probabilidades de los valores de la magnitud X por las probabilidades condicionales correspondientes. Sean X e Y dos magnitudes aleatorias discontinuas y

$$p_{ij} = P\begin{pmatrix} X = x_i \\ Y = y_j \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1. \tag{7.2.8}$$

En virtud del principio de adición de probabilidades, las probabilidades no condicionales de los valores de la magnitud Y se determinan por la fórmula

$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1, \tag{7.2.9}$$

y análogamente las probabilidades no condicionales de los valores de la magnitud X se determinan por la fórmula

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{7.2.10}$$

Las probabilidades condicionales de los valores de la magnitud aleatoria X con respecto a Y serán

$$P_{ij} = P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}, \quad \sum_{i=1}^{n} P_{ij} = 1, \tag{7.2.11}$$

y las probabilidades condicionales de los valores de la magnitud aleatoria Y con respecto a X serán

$$Q_{ij} = P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i}, \quad \sum_{j=1}^{m} Q_{ij} = 1. \tag{7.2.12}$$

Según la definición (7.2.1) *la entropía condicional* de la magnitud aleatoria X para el valor dado y_j de la magnitud Y se determinará por la fórmula

$$H[X \mid y_j] = -\sum_{i=1}^{n} p_{ij} {}^2\log P_{ij} \ (j = 1, \ldots, m). \tag{7.2.13}$$

La entropía condicional de la magnitud X depende del valor que toma la magnitud Y, es decir, ella misma es una magnitud aleatoria. Por medida de indeterminación de la magnitud aleatoria X, que queda después de observar la magnitud aleatoria Y, se toma la esperanza matemática de la entropía condicional

$$H_y[X] = M[H[X \mid Y]] = \sum_{j=1}^{m} q_j H[X \mid y_j].$$

Sustituyendo aquí la expresión (7.2.13) de la entropía condicional y tomando en consideración (7.2.11), obtendremos

$$H_y[X] = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} {}^2\log P_{ij}. \tag{7.2.14}$$

Esta magnitud se llama *entropía condicional media* de la magnitud aleatoria X con respecto a Y.

De un modo análogo se determina la entropía condicional media de la magnitud aleatoria Y con respecto a X:

$$H_x[Y] = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} {}^2\log Q_{ij}. \tag{7.2.15}$$

Para determinar la entropía condicional de la magnitud aleatoria continua X con respecto a la magnitud aleatoria continua Y,

basta sustituir en la fórmula (7.2.5) la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria X por la densidad de probabilidad condicional correspondiente $f_1(x \mid y)$. Entonces obtendremos

$$H[X \mid y] = -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x \mid y)\, {}^2\log f_1(x \mid y)\, dx. \qquad (7.2.16)$$

Esta magnitud depende del valor y de la magnitud aleatoria Y. Para determinar la entropía condicional media de la magnitud aleatoria X con respecto a Y, se debe multiplicar la expresión (7.2.16) por la densidad de probabilidad $f_2(y)$ de la magnitud aleatoria Y e integrar con respecto a y. Como resultado obtendremos

$$H_y[X] = M[H[X \mid Y]] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\, f_1(x \mid y)\, {}^2\log f_1(x \mid y)\, dx\, dy.$$

Pero

$$f_2(u)\, f_1(x \mid y) = f(x, y)$$

es la densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes aleatorias X e Y. Ahora bien, la entropía condicional media de la magnitud aleatoria X con respecto a Y se determina por la fórmula

$$H_y[X] = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, {}^2\log f_1(x \mid y)\, dx\, dy. \qquad (7.2.17)$$

Esta fórmula puede ser representada también en la forma

$$H_y[X] = -M[{}^2\log f_1(X \mid Y)]. \qquad (7.2.18)$$

Si las magnitudes aleatorias discontinuas X e Y son independientes, entonces $p_{ij} = p_{ij}$, $P_{ij} = p_i$, $Q_{ij} = q_j$ y las fórmulas (7.2.14) y (7.2.15) dan

$$H_y[X] = H[X], \quad H_x[Y] = H[Y]. \qquad (7.2.19)$$

Lo mismo en el caso de las magnitudes continuas independientes X e Y, sus densidades condicionales de probabilidad coinciden con las correspondientes densidades de probabilidad no condicionales y volvemos a obtener las fórmulas (7.2.19). Así pues, si las magnitudes aleatorias X e Y son independientes, todas sus entropías condicionales y las entropías condicionales medias coinciden con las correspondientes entropías no condicionales. En el § 7.4 demostraremos que si las magnitudes aleatorias X e Y son dependientes, la magnitud condicional media de cada una de ellas con respecto a la otra es siempre menor que la correspondiente entropía no condicional.

Ejemplo 7.2.4. Las magnitudes aleatorias X e Y tienen distribución conjunta normal. Hallar la entropía de la magnitud aleatoria X y su entropía condicional media con respecto a Y.

Como, según lo demostrado en el § 3.6, las distribuciones condicionales y no condicionales de las componentes de un vector aleatorio normalmente repartido son normales, entonces, para calcular la entropía y la entropía condicional de la magnitud aleatoria X, se puede aplicar la fórmula deducida en el ejemplo 7.2.1. Puesto que conforme a (3.6.11) la dispersión condicional de la magnitud aleatoria X no depende del valor y de la magnitud Y, la entropía condicional media de la magnitud X con respecto a Y coincide con la entropía condicional. Así pues, aplicando los resultados del ejemplo 7.2.1 y las fórmulas (3.6.6) y (3.6.11) para las dispersiones y las dispersiones condicionales de las componentes de un vector aleatorio repartido normalmente, hallamos

$$H[X] = {}^2\log \sqrt{2\pi e D[X]} = \frac{1}{2}\,{}^2\log \frac{2\pi e c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2},$$

$$H_y[X] = {}^2\log \sqrt{2\pi e D[X \mid Y]} = \frac{1}{2}\,{}^2\log \frac{2\pi e}{c_{11}}.$$

Al comparar estas fórmulas, vemos que la entropía condicional media de la magnitud X con respecto a Y es menor que su entropía no condicional si $c_{12} \neq 0$, es decir, si las magnitudes X e Y son dependientes. Si X e Y son independientes, entonces $c_{12} = 0$ y la entropía condicional media es igual a la no condicional.

Examinemos ahora dos magnitudes aleatorias discontinuas X e Y y hallemos su entropía conjunta, es decir, la entropía del vector aleatorio con las componentes X, Y. Según la definición ella es

$$H[X, Y] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\,{}^2\log p_{ij}.$$

Pero $p_{ij} = p_i Q_{ij}$ [véase la fórmula (7.2.12)]. Por lo tanto,

$$H[X, Y] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\,({}^2\log p_i + {}^2\log Q_{ij}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\Big)\,{}^2\log p_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\,{}^2\log Q_{ij}. \qquad (7.2.20)$$

Observemos ahora que conforme a (7.2.10)

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Por eso el primer sumando en (7.2.20) es la entropía de la magnitud aleatoria X. El segundo sumando, en virtud de (7.2.15), representa la entropía condicional media de la magnitud aleatoria Y con respecto a X. Por consiguiente, la fórmula (7.2.20) puede ser escrita en la forma

$$H[X, Y] = H[X] + H_x[Y]. \qquad (7.2.21)$$

En virtud de la simetría se puede también escribir

$$H[X, Y] = H[Y] + H_y[X]. \qquad (7.2.22)$$

Así pues, la entropía del conjunto de dos magnitudes aleatorias es igual a la suma de la entropía de una de ellas y la entropía condicional media de la otra.

Si las magnitudes aleatorias X e Y son independientes, las igualdades (7.2.21) y (7.2.22), en virtud de (7.2.19), toman la forma

$$H[X, Y] = H[X] + H[Y]. \tag{7.2.23}$$

De este modo, la entropía del conjunto de dos magnitudes aleatorias independientes es igual a la suma de sus entropías.

Aplicando el método de inducción matemática, se puede extender las fórmulas (7.2.21) y (7.2.22) a un número arbitrario de magnitudes aleatorias. Como resultado obtendremos la siguiente fórmula para la entropía del conjunto de n magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ (es decir, para la entropía de un vector aleatorio con las componentes $X_1, \ldots, X_n$):

$$H[X_1, \ldots, X_n] = H[X_1] + H_{x_1}[X_2] + \ldots + H_{x_1, \ldots, x_{n-1}}[X_n]. \tag{7.2.24}$$

Si las magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, la fórmula (7.2.24) tomará la forma

$$H[X_1, \ldots, X_n] = \sum_{i=1}^{n} H[X_i]. \tag{7.2.25}$$

§ 7.3. Propiedad extremal de la distribución normal

Demostremos que entre todas las magnitudes aleatorias que tienen la misma dispersión, las magnitudes aleatorias normalmente repartidas son las que poseen mayor entropía. En el ejemplo 7.2.1 hemos calculado ya la entropía de distribución normal

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{x^2}{2D}}. \tag{7.3.1}$$

Puesto que

$$^2\log f_N(x) = -\frac{1}{2} {}^2\log 2\pi D - \frac{x^2}{2D} {}^2\log e, \tag{7.3.2}$$

la entropía de la magnitud aleatoria X puede ser representada por la fórmula

$$H[X] = -\int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) \, {}^2\log f_N(x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} ({}^2\log 2\pi D) \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) \, dx + \frac{1}{2D} ({}^2\log e) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_N(x) \, dx. \tag{7.3.3}$$

Examinemos ahora la magnitud aleatoria arbitraria Y que tiene la esperanza matemática igual a cero y la misma dispersión D que la magnitud aleatoria normalmente repartida X. La densidad de probabilidad $f(y)$ de la magnitud Y satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_N(x)\,dx = D. \qquad (7.3.4)$$

Por lo tanto, en ambas integrales del último miembro de la fórmula (7.3.5), la densidad normal de probabilidad $f_N(x)$ puede ser sustituida por la densidad de probabilidad $f(x)$. Entonces obtendremos

$$H[X] = \frac{1}{2}\,(^2\log 2\pi D)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1}{D}\,(^2\log e)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{1}{2}\,^2\log(2\pi D) - \frac{x^2}{D}\,^2\log e\right] f(x)\,dx$$

o bien, teniendo en cuenta (7.3.2)

$$H[X] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,^2\log f_N(x)\,dx. \qquad (7.3.5)$$

Ahora bien, la densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria normalmente repartida en la expresión de su entropía, fuera del signo del logaritmo, puede sustituirse por la densidad arbitraria de probabilidad a la cual corresponden la esperanza matemática igual a cero y la misma dispersión igual a D.

Restando de la expresión (7.3.5) la expresión

$$H[Y] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,^2\log f(x)\,dx$$

de la entropía de la magnitud aleatoria Y, obtendremos

$$H[X] - H[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,^2\log\frac{f(x)}{f_N(x)}\,dx. \qquad (7.3.6)$$

Apliquemos ahora la desigualdad (7.1.6). En virtud de esta desigualdad podemos escribir

$$^2\log\frac{f(x)}{f_N(x)} \geqslant \left[1 - \frac{f_N(x)}{f(x)}\right]\,^2\log e. \qquad (7.3.7)$$

Dado que la densidad de probabilidad $f(x)$ no puede ser negativa, entonces de (7.3.7) se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,{}^2\log\frac{f(x)}{f_N(x)}\,dx \geqslant {}^2\log e \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[1-\frac{f_N(x)}{f(x)}\right]dx =$$

$$= {}^2\log e\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)\,dx\right] = 0.$$

Así pues, el segundo miembro de la fórmula (7.3.6) no puede ser negativo, de donde se deriva que

$$H[X] \geqslant H[Y]. \tag{7.3.8}$$

En (7.1.6) el signo de igualdad tiene lugar solamente en el caso cuando $u = 1$. Por lo tanto, también en (7.3.8) el signo de igualdad tendrá lugar sólo en el caso en que la densidad de probabilidad $f(x)$ coincide indénticamente con la densidad normal de probabilidad $f_N(x)$. Esto es lo que demuestra que la distribución normal tiene mayor entropía que otra distribución cualquiera correspondiente a la misma dispersión.

De un modo absolutamente análogo se demuestra que entre todas las distribuciones que tienen el mismo intervalo limitado de valores posibles de una magnitud aleatoria continua (a, b)

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1, \tag{7.3.9}$$

la distribución uniforme en el intervalo (a, b) posee la mayor entropía.

Con ayuda del mismo método se demuestra que entre todas las magnitudes aleatorias continuas positivas con la misma esperanza matemática m

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = 1, \quad \int_0^{\infty} xf(x)\,dx = m, \tag{7.3.10}$$

las magnitudes repartidas por la ley exponencial poseen la mayor entropía.

Le proponemos al lector que por sí mismo demuestre estas aserciones en calidad de ejercicio útil.

§ 7.4. Información que se contiene en las magnitudes aleatorias

Para eliminar por completo la indeterminación de una magnitud aleatoria, es necesario efectuar un experimento y determinar el valor que ésta toma. Sin embargo, en la práctica la magnitud aleato-

ria X, que nos interesa, a menudo no se puede someter a una observación. En tales casos tenemos que contentarnos con la observación de otras magnitudes aleatorias y por los resultados de esta observación sacar conclusiones acerca de la magnitud X, es decir, obtener la información sobre la magnitud X. Si esto es posible, se dice que las magnitudes aleatorias que se observan contienen información sobre la magnitud X. Intuitivamente está claro que la información sobre la magnitud aleatoria dada X la pueden contener solamente magnitudes aleatorias ligadas de uno u otro modo con dicha magnitud X, es decir, dependientes de X. Las magnitudes aleatorias independientes de X no pueden contener ninguna información de X. Ahora bien, se puede decir que la información es una de las formas de manifestación de la dependencia entre las magnitudes aleatorias (o entre fenómenos más generales).

Es natural que como medida de cantidad de información sobre la magnitud aleatoria X que se contiene en la magnitud aleatoria Y se toma la disminución de la indeterminación de la magnitud X obtenida como resultado de la observación de la magnitud Y, es decir, la diferencia entre la entropía de la magnitud X y su entropía condicional media con respecto a la magnitud Y. Partiendo de estas consideraciones, la cantidad de información sobre la magnitud aleatoria X contenida en la magnitud aleatoria Y se determina por la fórmula

$$I_y[X] = H[X] - H_y[X]. \tag{7.4.1}$$

La intuición nos sugiere que la cantidad de información no puede ser negativa. Demostremos esto. Para ello basta mostrar que la entropía condicional media de una magnitud aleatoria no puede ser mayor que su entropía no condicional. Para simplicidad, nos limitaremos al caso de magnitudes discontinuas X, Y. No obstante, esto se puede demostrar también, de un modo absolutamente semejante, referente a magnitudes aleatorias continuas. Sean X e Y dos magnitudes aleatorias discontinuas cuyos valores de probabilidad se determinan por las fórmulas (7.2.8)—(7.2.12). La entropía condicional media de la magnitud aleatoria X con respecto a Y, en virtud de (7.2.14), se determina por la fórmula

$$H_y[X] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\,{}^2\log P_{ij}. \tag{7.4.2}$$

Aplicando la fórmula (7.2.10), reduzcamos la expresión de la entropía no condicional de la magnitud X a la forma

$$H[X] = -\sum_{i=1}^{n} p_i\,{}^2\log p_i = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\,{}^2\log p_i. \tag{7.4.3}$$

Restando miembro a miembro la fórmula (7.4.2) de la (7.4.3), obtendremos

$$H[X]-H_y[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\,{}^2\log\frac{p_{ij}}{p_i}$$

o bien, teniendo en cuenta (7.2.11)

$$H[X]-H_y[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\,{}^2\log\frac{p_{ij}}{p_iq_j}. \qquad (7.4.4)$$

En virtud de la desigualdad (7.1.6)

$${}^2\log\frac{p_{ij}}{p_iq_j}\geqslant\left(1-\frac{p_iq_j}{p_{ij}}\right){}^2\log e. \qquad (7.4.5)$$

De (7.4.4.) y (7.4.5) se deduce que

$$H[X]-H_y[X]\geqslant{}^2\log e\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\left(1-\frac{p_iq_j}{p_{ij}}\right)=$$

$$={}^2\log e\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_iq_j\right). \qquad (7.4.6)$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1,\quad\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_iq_j=\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{m}q_j=1.$$

Por consiguiente, la desigualdad (7.4.6) es equivalente a la desigualdad

$$H[X]-H_y[X]\geqslant 0. \qquad (7.4.7)$$

En (7.4.5) y (7.4.7) el signo de igualdad puede tener lugar solamente en el caso cuando $p_{ij}=p_iq_j$ para todos los i, j, es decir, cuando las magnitudes X e Y son independientes.

Así pues, hemos demostrado que la cantidad de información no puede ser negativa y puede ser igual a cero solamente en el caso de X e Y independientes. Si las magnitudes X e Y son dependientes, cada una de ellas contiene una cantidad positiva de información sobre la otra.

De (7.2.21) y (7.2.22) se deduce que

$$H[X]+H_x[Y]=H[Y]+H_yX,$$

de donde

$$H[X]-H_y[X]=H[Y]-H_x[Y].$$

Esto quiere decir que la cantidad de información que se contiene en Y sobre la magnitud X es igual a la cantidad de información

que se contiene en X sobre Y:

$$I_y[X] = I_x[Y]. \tag{7.4.8}$$

De (7.2.21) y (7.4.7) se deriva también que

$$H[X, Y] \leqslant H[X] + H[Y]. \tag{7.4.9}$$

Puesto que según lo demostrado, la entropía condicional media de una magnitud aleatoria no puede ser nunca mayor que su entropía no condicional, entonces, de (7.2.24) se deduce la desigualdad

$$H[X_1, \ldots, X_n] \leqslant \sum_{i=1}^{n} H[X_i]. \tag{7.4.10}$$

El signo de igualdad tiene lugar en (7.4.9) y (7.4.10) solamente en el caso de magnitudes independientes.

Las fórmulas (7.4.9) y (7.4.10) muestran que la entropía de un vector aleatorio no puede ser mayor que la suma de las entropías de sus componentes y puede ser igual a esta suma solamente en el caso de componentes independientes.

De la desigualdad (7.4.10) se desprende también que entre todos los vectores aleatorios cuyas componentes tienen entropías asignadas de antemano, los vectores aleatorios con las componentes independientes poseen la mayor entropía.

La desigualdad (7.4.10), junto con la propiedad extremal de la distribución normal demostrada en el párrafo anterior, muestra que entre todos los vectores aleatorios cuyas componentes tienen dispersiones asignadas de antemano los vectores normalmente distribuidos con las componentes independientes poseen la mayor entropía.

Ejemplo 7.4.1. Hallar la cantidad de información acerca de una componente del vector aleatorio normalmente repartido, contenida en otra componente.

En virtud de los resultados del ejemplo 7.2.4 y la definición (7.4.1) de la cantidad de información tenemos

$$I_y[X] = \frac{1}{2} {}^2\log \frac{c_{11}c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$

o bien, tomando en consideración las relaciones (3.6.18) y (3.6.19) entre los coeficientes c_{ij} y las dispersiones y el coeficiente de correlación de las componentes del vector aleatorio,

$$I_y[X] = \frac{1}{2} {}^2\log \frac{D_x D_y}{D_x D_y - k_{xy}^2} = {}^2\log \frac{1}{\sqrt{1-r^2}},$$

donde r es el coeficiente de correlación de las magnitudes aleatorias X e Y.

Se puede demostrar todavía que por ninguna transformación de la magnitud aleatoria observada Y se puede aumentar la cantidad de información que ésta contiene sobre la magnitud aleatoria X. Con otras palabras, ninguna función de la magnitud aleatoria Y puede

contener mayor cantidad de información sobre la magnitud X que Y. Solamente en el caso de una transformación recíproca unívoca, o, usando la terminología física, transformación reversible, la cantidad de información queda invariable. En el caso de una transformación irreversible, la cantidad de información disminuye obligatoriamente.

Es obvio que la cantidad de información que se contiene en una magnitud aleatoria discontinua sobre sí misma es igual a su entropía:

$$I_x[X] = H[X]. \qquad (7.4.11)$$

En efecto, una vez efectuada la observación de una magnitud aleatoria, no queda en ella ninguna indeterminación. Por consiguiente, su entropía condicional media con respecto a sí misma es igual a cero. Esto es lo que demustra a la fórmula (7.4.11).

Al comparar la fórmula (7.4.11) con (7.4.1), se deduce que ninguna magnitud aleatoria puede contener más información sobre la magnitud aleatoria discontinua X que la misma magnitud X. Esto está claro intuitivamente sin recurrir a las fórmulas.

Capítulo 8

Determinación de las características estadísticas según los resultados de los experimentos

§ 8.1. Determinación de las probabilidades de acontecimientos, las funciones de distribución y las densidades de probabilidad

Como sabemos, la estabilidad singular de las frecuencias de acontecimientos y de los valores medios aritméticos de magnitudes aleatorias es un factor experimental importantísimo que sirve de base de la Teoría de las Probabilidades y determina la posibilidad de su empleo práctico. En el § 1.2 dimos la explicación elemental de estos factores. En los ejemplos del § 3.9 los últimos fueron explicados teóricamente con ayuda de las propiedades principales de las esperanzas matemáticas y las dispersiones de magnitudes aleatorias. La estabilidad de frecuencias y medias, que se observa prácticamente y se desprende de los principios fundamentales de la Teoría de las Probabilidades, da la posibilidad de determinar por vía experimental las características estadísticas principales (las probabilidades de acontecimientos y las esperanzas matemáticas de magnitudes aleatorias). En todos los casos esta posibilidad se determina por el hecho de que las dispersiones de ciertas funciones de los resultados aleatorios de los experimentos tienden a cero al crecer ilimitadamente el número de pruebas. La frecuencia de un acontecimiento es la relación de la magnitud aleatoria (el número de veces de producirse el acontecimiento) al número de pruebas, es decir, ella misma es una magnitud aleatoria. En distintas series de n experimentos iguales cada una, la frecuencia del acontecimiento tomará distintos valores. Sin embargo, la dispersión de la frecuencia siempre puede ser hecha tan pequeña como se quiera si se realiza en la serie n un número de experimentos lo suficientemente grande. La media aritmética de la magnitud aleatoria obtenida en una serie de experimentos es una magnitud aleatoria, puesto que el valor de la magnitud aleatoria que se examina es en cada prueba aleatorio. Por consiguiente, en distintas series de n experimentos iguales la media aritmética de la magnitud aleatoria prácticamente siempre tomará diferentes valores. No obstante, teniendo la serie un número de pruebas n lo suficientemente grande, la dispersión de la media aritmética puede ser hecha tan pequeña como se quiera. Debido a esto la fluctuación de las medias aritméticas, en distintas series de n experimentos cada una, será tan pequeña como se quiera siempre que n sea lo bastante grande. Así pues, al aumentar ilimitadamente el número de pruebas, las frecuencias de acontecimientos y las medias aritméticas de magnitudes aleatorias tratan,

en cierto grado, de «dejar de ser aleatorias» y estabilizarse alrededor de las características teóricas correspondientes: probabilidades de acontecimientos y esperanzas matemáticas de magnitudes aleatorias.

Vemos que es imposible determinar exactamente las características estadísticas a base de experimentos, ya que, cualquiera que sea el número finito de experimentos, las frecuencias de acontecimientos y las medias aritméticas de magnitudes aleatorias, calculadas según los resultados aleatorios de las pruebas, serán aleatorias. Además, es difícil hablar incluso sobre una determinación aproximada de las características estadísticas, puesto que, cualquiera que sea el número finito de pruebas, las dispersiones de frecuencias y de medias aritméticas son distintas del cero debido a lo cual es imposible estimar de un modo corriente el error de los resultados. Con otras palabras, es imposible valorar un error límite posible y garantizar que éste no sea superado. Siempre existe, aunque sea, tal vez, muy pequeña, la probabilidad de que el límite asignado de un error sea sobrepasado. Por eso en la Teoría de las Probabilidades se suele hablar no sobre la determinación, según los datos experimentales, de los valores precisos o aproximados de las características estadísticas sino sobre la estimación de los mismos. La calidad de estimación, es decir, su proximidad a la característica estadística que se aprecia, se determina generalmente por la magnitud que el error de estimación no puede superar con una probabilidad asignada de antemano. Esta magnitud siempre puede ser determinada si se conoce la ley de distribución de la estimación.

En virtud de los razonamientos expuestos, se llama *estimación* de una característica estadística (probabilidad, función de distribución, esperanza matemática, dispersión, momento de correlación, etc.) a tal función de los resultados de los experimentos que puede ser tomada como valor conveniente de la característica que se aprecia. La estimación de la característica estadística es función de los resultados de los experimentos y, tal vez, de los parámetros conocidos de la distribución de los mismos, pero no puede depender de los parámetros desconocidos de la ley de distribución, en particular de la característica que se aprecia.

La estimación de la característica estadística se denomina *fundada*, si, al aumentar ilimitadamente el número de experimentos, su esperanza matemática tiende hacia la característica que se aprecia y su dispersión tiende a cero. Si, por lo menos, una de estas dos condiciones no se ha cumplido, la estimación se llama *no fundada*.

En la práctica se emplean de ordinario sólo las estimaciones fundadas, puesto que únicamente en este caso se puede obtener una estimación tan precisa como se quiera (es decir, una probabilidad de grandes errores tan pequeña como se quiera) al ser el número de experimentos lo suficientemente grande.

La estimación cuya esperanza matemática, cualquiera que sea el número de experimentos, es igual a la característica estadística que se aprecia se denomina *no desplazada*. La estimación cuya esperanza matemática no es igual a la característica estadística que se aprecia se denomina *desplazada*.

La determinación de las estimaciones de las características estadísticas, sus leyes de distribución y los errores admisibles con probabilidades correspondientes es la tarea principal de un apartado especial de la Teoría de las Probabilidades denominada Estadística Matemática. La Estadística Matemática moderna representa una vasta y bien estudiada asignatura que dispone de numerosos y eficaces métodos de investigación y a la cual se han dedicado muchos libros especiales. En esta breve introducción a la Teoría de las Probabilidades no es posible exponer ni siquiera algunos métodos fundamentales de Estadística Matemática. Por eso nos limitamos aquí a los procedimientos más elementales de la determinación de las apreciaciones de las características estadísticas principales. A los lectores que deseen conocer más profundamente los métodos de la Estadística Matemática moderna les recomendamos el excelente libro de H. Kramer*).

Es conveniente tomar por estimación de la probabilidad p de un acontecimiento la frecuencia de producción del mismo p^* obtenida como resultado de experimentos, es decir, la relación del número de veces m de suceder el acontecimiento al número n de todos los experimentos realizados:

$$p^* = \frac{m}{n}. \tag{8.1.1}$$

La frecuencia de un acontecimiento es una magnitud aleatoria que toma un valor determinado solamente después de efectuarse el experimento. En distintas series de n pruebas cada una, la frecuencia toma distintos valores. Designemos por X_n el número aleatorio de veces que ocurre el acontecimiento si se realizan n experimentos. Entonces la frecuencia del acontecimiento, considerada como magnitud aleatoria P^*, se determina por la fórmula

$$P^* = \frac{X_n}{n}. \tag{8.1.2}$$

Al calcular la estimación de la probabilidad de un acontecimiento, la magnitud aleatoria X_n se sustituye por su valor m que se ha obtenido como resultado de los experimentos. En conclusión se obtiene la fórmula (8.1.1).

---

*) H. Kramér. Mathematical Methods of Stadistics. Princeton Univ. Press, 1946 (Versión rusa: H. Kramer. Métodos matemáticos de Estadística. Editorial de Literatura Extranjera, 1948).

En el ejemplo 3.9.1. fue mostrado que la esperanza matemática de la frecuencia P^* y su dispersión se determinan por las fórmulas [Véanse las fórmulas (3.9.25) y (3.9.26)]

$$M[P^*] = p, \; D[P^*] = \frac{pq}{n}, \tag{8.1.3}$$

donde p es la probabilidad buscada del acontecimiento y $q = 1 - p$. La primera fórmula (8.1.3) muestra que la frecuencia del acontecimiento es la estimación no desplazada de la probabilidad del mismo. La segunda fórmula (8.1.3) muestra que la dispersión de frecuencia es inversamente proporcional al número de experimentos n. Si la calidad de estimación (8.1.2) se caracteriza por su desviación cuadrática media, se puede decir que el error de la estimación de probabilidad de un acontecimiento, según la fórmula (8.1.1), decrece inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de experimentos a medida que aumenta este número. Así, por ejemplo, al aumentar el número de experimentos 100 veces, el error de estimación disminuye 10 veces.

La función de distribución de la magnitud aleatoria X representa la probabilidad del acontecimiento $X < x$ considerada como función de la variable x. Por eso en calidad de estimación de la función de distribución de la magnitud aleatoria X se puede tomar la frecuencia del acontecimiento $X < x$ calculada para todos los valores de x. Como vimos en el § 1.2, al realizar n experimentos, la frecuencia del acontecimiento $X < x$ siempre se representará por una curva escalonada, con ello, las alturas de los escalones son iguales a $1/n$ o múltiples de este número. Para hallar la estimación de la función de distribución de una magnitud aleatoria continua, esta curva escalonada comúnmente se alisa, es decir, se sustituye por una curva más suave. Así pues, por estimación de la función de distribución de una función aleatoria X se toma generalmente la función obtenida mediante la diferenciación de la curva escalonada de la función empírica de distribución hallada como curva de la frecuencia del acontecimiento $X < x$ en función de x. La diferenciación puede ser llevada a cabo con ayuda de una curva analítica conveniente o a simple vista. En el primer caso se obtiene una expresión analítica de la estimación de la función de distribución. En el segundo caso la estimación de la función de distribución se obtiene en forma de una curva suave que la representa.

La derivación de la expresión analítica de la estimación de la función de distribución de una magnitud aleatoria es el mejor procedimiento para hallar la estimación de la densidad de probabilidad de la misma. Sin embargo, se puede encontrar también las estimaciones de las densidades de probabilidad por medio de la derivación gráfica de las curvas que representan las estimaciones de las funciones de distribución. Por fin, se puede hallar la estimación de la den-

sidad de probabilidad de una magnitud aleatoria, sin determinar previamente la función de distribución, como la densidad de la frecuencia con que el valor de la magnitud aleatoria va a parar en distintos pequeños intervalos del eje numérico. Para esto el intervalo, en el cual han ido a parar todos los valores de la magnitud aleatoria, observados como resultado de los experimentos, se divide en intervalos pequeños y para cada intervalo se determina la relación entre la frecuencia con que el valor de la magnitud aleatoria alcanza este intervalo y su longitud. Los resultados obtenidos se representan gráficamente. Para esto en cada intervalo se construye un rectángulo cuya altura es igual a la relación de la frecuencia con que el valor de la magnitud aleatoria va a parar en este intervalo a su longitud (fig. 8.1.1). A semejante gráfico se le llama *polígono de frecuencias*. Para hallar la estimación de la densidad de probabilidad, el polígono de frecuencias obtenido se alisa con ayuda de una curva analítica conveniente. Como resultado se obtiene la expresión analítica de la densidad de probabilidad.

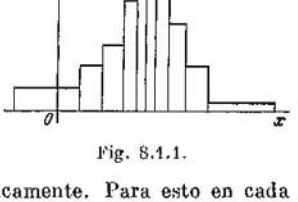


Fig. 8.1.1.

§ 8.2. Determinación de los momentos de magnitudes aleatorias

Por estimación de la esperanza matemática de una magnitud aleatoria conviene tomar su media aritmética obtenida como resultado de experimentos. Supongamos que como resultado de n pruebas independientes realizadas en iguales condiciones la magnitud aleatoria X toma los valores $x_1, \ldots, x_n$. Entonces la estimación m_x^* de la esperanza matemática m_x se determinará por la fórmula

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} x_i. \qquad (8.2.1)$$

La estimación de la esperanza matemática toma un valor determinado solamente después de llevar a cabo los experimentos, puesto que las magnitudes $x_1, \ldots, x_n$ representan los valores de la magnitud aleatoria x obtenidos como resultado de las pruebas. Designemos por medio de $X_1, \ldots, X_n$ los valores aleatorios de la magnitud aleatoria X en n experimentos dados. Entonces la estimación de la esperanza matemática de la magnitud aleatoria X, considerada antes de realizar la prueba como magnitud aleatoria, se expresará por la

fórmula

$$M_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{8.2.2}$$

En el ejemplo 3.9.2 fue demostrado que la esperanza matemática y la dispersión de la media aritmética de una magnitud aleatoria X al efectuar n experimentos se determinan por las fórmulas [véanse las fórmulas (3.9.27)]

$$M[M_x^*] = m_x, \quad D[M_x^*] = \frac{D_x}{n}, \tag{8.2.3}$$

donde D_x es la dispersión de la magnitud aleatoria X. La primera fórmula (8.2.3) muestra que la media aritmética es una estimación no desplazada de la esperanza matemática de la magnitud aleatoria. La segunda fórmula (8.2.3) muestra que siempre que la precisión de la estimación (8.2.2) se caracterice por su desviación cuadrática media, el error de la estimación de la esperanza matemática decrece inversamente proporcional a $\sqrt{n}$ al aumentar n.

La dispersión de la magnitud aleatoria X representa, según la definición, la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $(X - m_x)^2$. Por eso la media aritmética de la magnitud $(X - m_x)^2$ es una estimación natural D_x^* de la dispersión D_x.

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2. \tag{8.2.4}$$

Esta estimación depende de la esperanza matemática m_x de la magnitud aleatoria X. Por eso puede ser aplicada sólo en el caso en que la esperanza matemática de la magnitud aleatoria sea conocida. En este caso la estimación (8.2.4), como estimación de la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $Y = (X - m_x)^2$, es una estimación no desplazada de la dispersión de la magnitud aleatoria X.

Sin embargo, la esperanza matemática de una magnitud aleatoria es, como regla, desconocida y se determina por los resultados de los mismos experimentos que la dispersión. En tales casos conviene sustituir en la fórmula (8.2.4) la esperanza matemática por su estimación. Como resultado, para la estimación de la dispersión de la magnitud aleatoria X se obtiene la fórmula

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2. \tag{8.2.5}$$

No obstante, esta estimación resulta ser desplazada. Para demostrar esta afirmación, sustituyamos en la fórmula (8.2.5) los valores concretos $x_1, \ldots, x_n$ de la magnitud aleatoria X, obtenidos como resul-

tado de experimentos, por las magnitudes aleatorias correspondientes $X_1, \ldots, X_n$ y vamos a considerar la estimación de la dispersión, sin enlazarla con pruebas concretas, como magnitud aleatoria:

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - M_x^*)^2. \qquad (8.2.6)$$

Para determinar la esperanza matemática de esta estimación, basta sustituir todos los sumandos de la suma por las esperanzas matemáticas de los mismos (véase el § 3.8). Calculemos previamente las esperanzas matemáticas de los sumandos que forman la suma de la fórmula (8.2.6). Conforme a la definición de la dispersión de una magnitud aleatoria, teniendo en cuenta que la esperanza matemática de la diferencia $X_i - M_x^*$ es igual a cero, tenemos

$$M[(X_i - M_x^*)] = D[X_i - M_x^*]. \qquad (8.2.7)$$

Pero

$$X_i - M_x^* = X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = \left(1 - \frac{1}{n}\right) X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} {}^{i}X_j,$$

donde el índice i anexo a la suma muestra que la adición se realiza con respecto a todos los valores del índice j de 1 hasta n, salvo el valor $j = i$. Así pues, la diferencia $X_i - M_x^*$ representa una función lineal de n magnitudes aleatorias $X_1, \ldots, X_n$. Estas magnitudes son independientes puesto que según la suposición los experimentos son independientes. Por eso, para calcular la dispersión de la diferencia $X_i - M_x^*$ se puede aplicar la fórmula (3.9.7) para la dispersión de una función lineal de magnitudes aleatorias no correlacionadas. Dado que los experimentos, según la suposición, se efectúan en condiciones iguales, las dispersiones de todas las magnitudes $X_1, \ldots, X_n$ son equivalentes e iguales a la dispersión D_x de la magnitud aleatoria X. Así pues, aplicando la fórmula (3.9.7), obtendremos un sumando igual al producto de D_x por el cuadrado del coeficiente anexo a X_i y $n - 1$ sumandos iguales al producto de D_x por $1/n^2$:

$$D[X_i - M_x^*] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 D_x + \frac{n-1}{n^2} D_x = \frac{n-1}{n} D_x. \qquad (8.2.8)$$

Las fórmulas (8.2.7) y (8.2.8) muestran que las esperanzas matemáticas de todos los sumandos en la suma de la fórmula (8.2.6) son iguales. Por lo tanto,

$$M[Z_n] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{n-1}{n} D_x = \frac{n-1}{n} D_x. \qquad (8.2.9)$$

Así pues, la esperanza matemática de la estimación de la dispersión D_x (8.2.6) no es igual a la dispersión D_x, aunque tiende a D_x cuando $n \to \infty$, como esto debe ser de acuerdo con la definición de la esti-

mación. El resultado obtenido muestra que la fórmula (8.2.5) da una estimación desplazada de la dispersión. Esto quiere decir que, aplicando la fórmula (8.2.5) para estimar la dispersión de una magnitud aleatoria, obtendremos un error sistemático. La dispersión resultará ser por término medio menor que la real.

Para hallar una estimación no desplazada de la dispersión de la magnitud aleatoria cuya esperanza matemática es desconocida, observemos que, en virtud de la fórmula (8.2.9), la esperanza matemática de una magnitud aleatoria

$$U_n = \frac{n}{n-1} Z_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - M_x^*)^2 \qquad (8.2.10)$$

es igual a la dispersión D_x de la magnitud aleatoria X. Por eso la estimación no desplazada de la dispersión D_x de la magnitud aleatoria X suele determinarse por la fórmula

$$D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2. \qquad (8.2.11)$$

Esta fórmula se aplica generalmente para determinar las dispersiones de magnitudes aleatorias por los resultados de los experimentos cuando las esperanzas matemáticas son desconocidas.

Análogamente se hallan las estimaciones de los momentos de correlación de magnitudes aleatorias. Como, según la definición, el momento de correlación k_{xy} de dos magnitudes aleatorias reales X e Y es la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $(X - m_x)(Y - m_y)$, entonces la estimación natural del momento de correlación es la media aritmética de esta magnitud aleatoria:

$$k_{xy}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)(y_i - m_y). \qquad (8.2.12)$$

Esta fórmula da una estimación no desplazada del momento de correlación siempre que las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X e Y sean conocidas.

Si las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X e Y son desconocidas, entonces la estimación no desplazada de su momento de correlación k_{xy} se ofrece por la fórmula

$$k_{xy}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*), \qquad (8.2.13)$$

donde m_x^*, m_y^* son las estimaciones de las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X, Y respectivamente:

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad m_y^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

§ 8.3. Determinación de los momentos de funciones aleatorias estacionarias

Al determinar las características de funciones aleatorias estacionarias, se supone comúnmente que éstas son ergódicas y se utiliza una sola realización suficientemente larga de la magnitud aleatoria, obtenida experimentalmente. Supongamos que como resultado de la prueba ha sido obtenida la realización $x(t)$ de la función aleatoria estacionaria ergódica $X(t)$ en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant T$. Entonces, en virtud de lo expuesto en el § 5.5, por estimación de la esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ se puede tomar la magnitud

$$m_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt. \tag{8.3.1}$$

Según lo demostrado en el § 5.5, la esperanza matemática de esta estimación es igual a la esperanza matemática m_x de la función

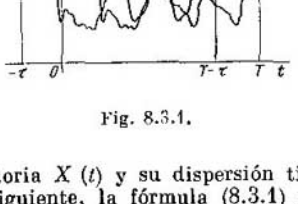


Fig. 8.3.1.

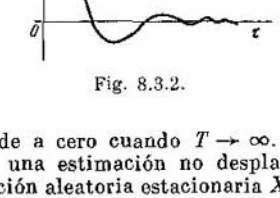


Fig. 8.3.2.

aleatoria $X(t)$ y su dispersión tiende a cero cuando $T \to \infty$. Por consiguiente, la fórmula (8.3.1) da una estimación no desplazada de la esperanza matemática de la función aleatoria estacionaria $X(t)$.

La estimación de la función correlativa $k_x(\tau)$ de una función aleatoria estacionaria ergódica (con respecto a la correlativa) se determina, en virtud de los resultados del § 5.5, por la fórmula

$$k_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x^*]\, [x(t+\tau) - m_x^*]\, dt. \tag{8.3.2}$$

Aquí el valor medio ha sido tomado en el intervalo $(0, T-\tau)$ puesto que las funciones $x(t)$ y $x(t+\tau)$ son conocidas conjuntamente solamente en este intervalo (fig. 8.3.1). La fórmula (8.3.2) da la estimación de la función correlativa para $\tau > 0$. Cuando $\tau < 0$, la estimación de la función correlativa se determina de la condición de su paridad

Se puede recomendar que la fórmula (8.3.2) se aplique cuando $\tau < T/5$. Si τ tiene grandes valores, el error de la estimación de la función correlativa según la fórmula (8.3.2) aumentará. Si la estimación de la función correlativa, obtenida por la fórmula (8.3.2), tiende con evidencia a cero al aumentar τ (fig. 8.3.2), se considera que la suposición acerca de la ergodicidad de la función aleatoria es justa. Si la estimación de la función correlativa tiene una «cola» distinta del cero (fig. 8.3.3), se considera que la suposición acerca de la ergodicidad no se justifica. En estos casos conviene determinar cuál es la causa de no ergodicidad. En el § 5.5 hemos visto que una causa típica de no ergodicidad de un proceso aleatorio estacionario con respecto a la función correlativa es la presencia de una componente periódica en la propia función aleatoria. Si es ésta la causa de no ergodicidad (más exactamente, de «no atenuación» de la función correlativa), conviene separar de la función aleatoria la componente periódica y sólo después hallar la estimación de la función correlativa aplicando la fórmula (8.3.2).

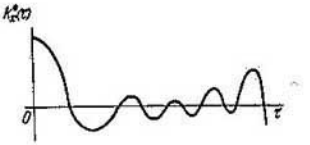


Fig. 8.3.3.

Si en la función aleatoria en cuestión hay una componente sinusoidal, entonces, en virtud de los resultados de los ejemplos 5.5.2 y 5.5.3, la fórmula (8.3.2) dará en la función correlativa una cosinusoide de la misma frecuencia, cuya amplitud es igual a la mitad del cuadrado de la amplitud de la componente sinusoidal de la función aleatoria. Prácticamente esta cosinusoide en la forma pura servirá de «cola» de la función correlativa (fig. 8.3.3). Por eso la frecuencia y la amplitud de la componente sinusoidal que forma parte de una función aleatoria estacionaria se determina fácilmente por la «cola» que se tiene en la estimación de la función correlativa. Al mismo tiempo, la fase de la componente sinusoidal puede ser determinada sólo por selección procurando obtener que desaparezca la componente periódica en la estimación correlativa. En el caso de que en la estimación de la función correlativa haya una componente periódica no sinusoidal, conviene descomponer esta última en la serie de Fourier en los cosenos de las frecuencias correspondientes al período. Con ello, serán determinadas las amplitudes y frecuencias de las sinusoides correspondientes que forman parte de la propia función aleatoria. Las fases de estas sinusoides se determinan seleccionándolas por turno de modo que se logre la desaparición de las cosinusoides correspondientes en la «cola» de la función correlativa.

De un modo absolutamente análogo se halla la estimación de la función correlativa recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas $X(t)$ y $Y(t)$. Si se supone que estas

funciones aleatorias son ergódicas con respecto a la función correlativa recíproca, entonces la estimación de esta última a base de un par de realizaciones $x(t)$ e $y(t)$ de las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ anotadas en el intervalo $0 < t < T$ se determina por la fórmula

$$k^*_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m^*_x][y(t+\tau) - m^*_y]\, dt. \qquad (8.3.3)$$

Esta fórmula ofrece la estimación de la función correlativa recíproca para $\tau > 0$. Cuando $\tau < 0$, la estimación de la función correlativa recíproca, en virtud de la relación (5.1.14), se determina por la fórmula

$$k^*_{xy}(\tau) = k^*_{yx}(-\tau). \qquad (8.3.4)$$

Las integrales de las fórmulas (8.3.1), (8.3.2) y (8.3.3) pueden ser calculadas con ayuda de calculadoras analógicas. Al determinar las estimaciones de las esperanzas matemáticas y funciones correlativas de funciones aleatorias estacionarias valiéndose de calculadoras digitales y de calculadoras manuales, las integrales de las fórmulas (8.3.1), (8.3.2) y (8.3.3) se sustituyen por sumas. Para esto intervalo $(0, T)$ se divide en un gran número n de intervalos iguales de longitud $\Delta = T/n$ y la integral en (8.3.1) se sustituye por la suma:

$$m^*_x = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^{n} x\left(i\Delta - \frac{\Delta}{2}\right)\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x\left(i\Delta - \frac{\Delta}{2}\right).$$

Poniendo aquí, para abreviar, que

$$x_i = x\left(i\Delta - \frac{\Delta}{2}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

obtendremos para la estimación de la esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ la fórmula

$$m^*_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (8.3.5)$$

Análogamente, para las estimaciones de la función correlativa y de la función correlativa recíproca obtendremos las fórmulas

$$k^*_x(m\Delta) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} (x_i - m^*_x)(x_{i+m} - m^*_x), \qquad (8.3.6)$$

$$k^*_{xy}(m\Delta) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} (x_i - m^*_x)(y_{i+m} - m^*_y). \qquad (8.3.7)$$

Pasemos ahora a determinar las densidades espectrales de funciones aleatorias estacionarias. Como procedimiento más sencillo para hallar la estimación de la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria puede servir la aproximación previa de estimación de la función correlativa de una de las tres funciones correlativas tipo, examinadas en los ejemplos de los §§ 5.2 y 5.3, o de la combinación lineal de tales funciones, con determinación sucesiva de la densidad espectral por las fórmulas (5.2.22) ó (5.3.9). Con ello, la estimación de la densidad espectral se obtiene en forma de una función racional fraccionaria, lo que es muy cómodo para resolver los problemas prácticos para los cuales se determina la densidad espectral.

En virtud de los resultados del § 5.5, la estimación de la función correlativa de una función aleatoria estacionaria, ergódica con respecto a la función correlativa

$$K_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} X^0(t)\, X^0(t+\tau)\, dt, \tag{8.3.8}$$

tiende a la función correlativa $k_x(\tau)$:

$$\lim_{T\to\infty} K_x^*(\tau) = k_x(\tau), \tag{8.3.9}$$

en el sentido de que la esperanza matemática del cuadrado de la diferencia entre $K_x^*(\tau)$ y $k_x(\tau)$ tiende a cero cuando $T \to \infty$. Surge la pregunta: ¿Se podría determinar la estimación de la densidad espectral sustituyendo en la fórmula (5.3.9) directamente la estimación de la función correlativa calculada por la fórmula (8.3.2)? Con ello, es necesario sustituir en la fórmula (5.3.9) el intervalo infinito de integración por el finito $(-T, T)$, puesto que, por la realización de la función aleatoria de longitud T, es imposible determinar por la fórmula (8.3.2) la estimación de la función correlativa para $|\tau| > T$. Para resolver la cuestión planteada, es necesario hallar la esperanza matemática y la dispersión de la función aleatoria

$$\widetilde{S}_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} K_x^*(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^T K_x^*(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau. \tag{8.3.10}$$

Es fácil ver que, en virtud de las fórmulas (8.3.9) y (5.3.9), la esperanza matemática de la función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$ tiende hacia la densidad espectral $s_x(\omega)$ de la función aleatoria $X(t)$ para $T \to \infty$. No obstante, en el caso general, la dispersión de la función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$ no tiende a cero cuando $T \to \infty$. Por lo tanto, la función (8.3.10), obtenida como resultado de la transformación de Fourier de la estimación de la función correlativa, es una estimación no fundada de la densidad espectral y por eso prácticamente no puede servir de estimación de dicha densidad.

Para hallar la estimación fundada de la densidad espectral valiéndose directamente de la estimación de la función correlativa, sin aproximarla previamente por la expresión analítica, observemos que para la función aleatoria normalmente repartida $X(t)$ la función $\widetilde{S}_x^*(\omega)$ posee la propiedad de que para cualesquiera ω_1 y ω_2 fijas*)

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \widetilde{S}_x^*(\omega)\, d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_x(\omega)\, d\omega. \tag{8.3.11}$$

En (8.3.11) el límite debe comprenderse en el sentido de que la esperanza matemática del cuadrado de la diferencia entre las integrales en (8.3.11) tiende a cero para $T \to \infty$. En virtud de (8.3.11) se puede considerar prácticamente que, cuando T sea suficientemente grande, será válida la igualdad aproximada

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \widetilde{S}_x^*(\omega)\, d\omega \approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_x(\omega)\, d\omega \tag{8.3.12}$$

independientemente de la realización posible de la función aleatoria $X(t)$ utilizada para el cálculo de la función $\widetilde{S}_x^*(\omega)$.

Poniendo en (8.3.12) $\omega_1 = \omega_0 - \alpha$, $\omega_2 = \omega_0 + \alpha$, para un valor de α lo suficientemente pequeño, obtendremos

$$\int_{\omega_0-\alpha}^{\omega_0+\alpha} s_x(\omega)\, d\omega \approx 2\alpha s_x(\omega_0). \tag{8.3.13}$$

De otro lado, en virtud de (8.3.10)

$$\int_{\omega_0-\alpha}^{\omega_0+\alpha} \widetilde{S}_x^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^T K_x^*(\tau)\, \frac{\operatorname{sen}(\omega_0+\alpha)\tau - \operatorname{sen}(\omega_0-\alpha)\tau}{\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^T K_x^*(\tau)\, \frac{\cos\omega_0\tau \operatorname{sen}\alpha\tau}{\tau}\, d\tau. \tag{8.3.14}$$

Sustituyendo las expresiones (8.3.13) y (8.3.14) en (8.3.12), obtendremos después de dividir por 2α

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T K_x^*(\tau)\, \frac{\cos\omega_0\tau \operatorname{sen}\alpha\tau}{\alpha\tau}\, d\tau \approx s_x(\omega_0). \tag{8.3.15}$$

*) Véase J. L. Doob. Stochastic Processes. John Wiley, 1953, chapt. 10, § 8 (Versión rusa: J. L. Doob. Procesos probabilísticos. Editorial de Literatura Extranjera, 1956, cap. 10, § 8).

De aquí se ve que de estimación fundada de la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria $X(t)$ puede servir la función

$$s_x^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\tau k_x^*(\tau) \frac{\cos \omega\tau \operatorname{sen} \alpha\tau}{\alpha\tau} d\tau, \qquad (8.3.16)$$

donde $k_x^*(\tau)$ es la estimación de la función correlativa calculada por la fórmula (8.3.2).

Al deducir la fórmula (8.3.15), fue aplicado el teorema de la media a la integral del segundo miembro de la igualdad (8.3.12). Tenemos derecho a hacerlo siempre que la densidad espectral $s_x(\omega)$ sea continua en el intervalo $(\omega_0 - \alpha, \omega_0 + \alpha)$. Sin embargo, el teorema de la media no se puede de ningún modo aplicar a la integral del primer miembro de la igualdad (8.3.12). Esto se explica por el carácter especial de la función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$. Todas sus realizaciones son funciones que oscilan rápidamente en una gran gama. Además, siendo T lo suficientemente grande, sus realizaciones, en un intervalo tan pequeño como se quiera (ω_1, ω_2), realizan en amplios límites una infinidad de oscilaciones caóticas. Por eso el valor de la función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$ en el punto ω_0 es aleatorio, tiene una gran dispersión y debido a esto no puede ser tomado por su media en este intervalo. Por este mismo carácter de las realizaciones de la función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$ se explica el hecho de que la igualdad (8.3.11) es válida, mientras que la propia función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$, cualquiera que sea el valor ω, no tiende hacia el valor correspondiente de la densidad espectral $s_x(\omega)$. Como resultado de la integración, las oscilaciones de la función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$ se alisan, y al ser T lo suficientemente grande, cuando el número de oscilaciones en el intervalo (ω_1, ω_2) se hace grande, las desviaciones de esta función hacia arriba se compensan prácticamente por completo con las oscilaciones hacia abajo y la integral se hace prácticamente independiente de la realización concreta de la función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$. La fórmula (8.3.15) es resultado de este alisado de la función $\widetilde{S}_x^*(\omega)$.

Cuanto mayor sea la magnitud α en las fórmulas anteriores, tanto mejor se alisarán las oscilaciones de la función aleatoria $\widetilde{S}_x^*(\omega)$, tanto más exacta será la igualdad (8.3.12) para la longitud dada de la realización T. Sin embargo, la igualdad (8.3.13) será tanto más exacta, cuanto menor sea α. Es obvio que esta igualdad es absolutamente exacta cuando la densidad expectral $s_x(\omega)$ varía linealmente en el intervalo $(\omega_0 - \alpha, \omega_0 + \alpha)$. Por eso la magnitud α debe ser elegida lo suficientemente pequeña para que la densidad espectral $s_x(\omega)$ pueda ser considerada aproximadamente como función lineal en el intervalo $(\omega_0 - \alpha, \omega_0 + \alpha)$. Ahora bien, la magnitud α debe ser escogida en la fórmula (8.3.16) satisfaciendo dos requisitos contra-

dictorios. Es evidente que estos requisitos los satisface el mayor valor de α para el cual la densidad espectral $s_x(\omega)$ puede ser considerada aproximadamente lineal en cualquier intervalo de frecuencias de longitud 2α. Prácticamente la magnitud conveniente de α se determina por selección.

De un modo semejante, para la estimación de la densidad espectral recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas $X(t)$ e $Y(t)$ se obtiene la fórmula

$$s^*_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} k^*_{xy}(\tau)\, e^{-i\omega\tau} \frac{\operatorname{sen} \alpha\tau}{\alpha\tau} d\tau. \qquad (8.3.17)$$

§ 8.4. Determinación de los momentos de funciones aleatorias no estacionarias

El cálculo de la estimación de la esperanza matemática de una función aleatoria estacionaria, valiéndose de la fórmula (8.3.1), se puede considerar como alisado de su realización obtenida como

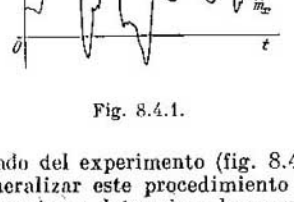


Fig. 8.4.1.

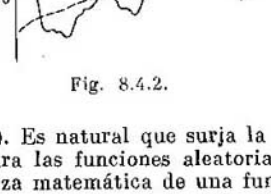


Fig. 8.4.2.

resultado del experimento (fig. 8.4.1). Es natural que surja la idea de generalizar este procedimiento para las funciones aleatorias no estacionarias y determinar la esperanza matemática de una función aleatoria no estacionaria alisando una de sus realizaciones (fig. 8.4.2). Esto es completamente posible si la realización de una función aleatoria $X(t)$, obtenida como resultado del experimento, es lo suficientemente larga. En este caso el alisado de la realización puede ser efectuado a simple vista o bien aplicando cualquier otro método de alisado de funciones. Para alisar a simple vista, es necesario construir la realización obtenida (o anotarla directamente durante la prueba) en una escala lo suficientemente pequeña por el eje de la variable independiente, para que se manifieste lo más claramente posible la banda llenada por la realización. Trazando a simple vista la línea axial de esta banda, obtendremos precisamente la curva que puede ser tomada por estimación de la esperanza matemática de la función aleatoria.

Para alisar con ayuda de calculadoras digitales o calculadoras manuales, se puede aplicar el método de la media móvil. Este método consiste en que por valor alisado de la función en cualquier punto t se toma su media en cierto intervalo con centro en el punto t. Al variar t, este intervalo se mueve a lo largo del eje t que es lo que explica el nombre dado a este método. Aplicando el método de la media móvil, obtendremos para la estimación de la esperanza matemática de una función aleatoria no estacionaria la fórmula

$$m_x^* = \frac{1}{2T_0} \int_{t-T_0}^{t+T_0} x(s)\, ds. \tag{8.4.1}$$

Cuanto más grande sea el intervalo $2T_0$ en esta fórmula tanto mejor será el alisado. Por otro lado, si T_0 es muy grande, se alisará también la propia esperanza matemática de la función aleatoria. Por eso se recomienda elegir T_0 lo suficientemente grande, para que en cualquier intervalo de longitud $2T_0$ el carácter aleatorio de la función aleatoria dada «se manifieste lo bastante» en la realización anotada (es decir, para que en cualquier intervalo de longitud $2T_0$ se observe una cantidad suficientemente grande de oscilaciones de la realización), y lo suficientemente pequeño para que la esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ pueda ser considerada aproximadamente lineal en cualquier intervalo de longitud $2T_0$.

Si estas condiciones no se observan, es imposible en principio determinar la esperanza matemática de la función aleatoria alisando una de sus realizaciones. De ejemplo típico de esta clase puede servir la función aleatoria en la cual prácticamente todas las realizaciones posibles se representan por curvas suaves. La esperanza matemática de tal función aleatoria puede ser determinada solamente teniendo un número suficientemente grande de realizaciones.

Para determinar la estimación de la función correlativa de una función aleatoria no estacionaria por el método de alisado, partiremos de la igualdad

$$K_x(t+\tau, t) = M[X^\circ(t+\tau)\, X^\circ(t)] \tag{8.4.2}$$

En virtud de esta igualdad, la estimación del valor de la función correlativa, cualquiera que sea el valor fijo de τ, puede ser obtenida alisando la realización de la función aleatoria

$$Z_\tau(t) = [X(t+\tau) - M_x^*(t+\tau)]\,[X(t) - M_x^*(t)], \tag{8.4.3}$$

que se considera como función de τ. El alisado puede llevarse a cabo a simple vista, trazando la línea axial de la banda en la cual oscila la realización de la función aleatoria o bien aplicando cualquier otro método de alisado de funciones. Al utilizar para el alisado el método de la media móvil, obtedremos para la estimación de la función co-

rrelativa la fórmula

$$K_x^*(t+\tau, t) = \frac{1}{2T_1} \int_{t-T_1}^{t+T_1} [x(s+\tau) - m_x^*(s+\tau)]\,[x(s) - m_x^*(s)]\,ds. \quad (8.4.4)$$

La magnitud T_1 debe ser elegida lo más grande posible, pero tal que el valor de la función correlativa para el valor dado de τ, considerado como función de t, pueda ser estimado aproximadamente como función lineal en cualquier intervalo de longitud $2T_1$.

Conviene subrayar que la determinación de la esperanza matemática y de la función correlativa de una función aleatoria no estacionaria aplicando el método de alisado es posible solamente en el caso en que la longitud de la realización anotada supera considerablemente el intervalo de correlación de la función aleatoria. No obstante, en este caso la precisión de las estimaciones obtenidas de tal modo será considerablemente menor que en el caso de funciones aleatorias estacionarias puesto que los intervalos de mediación en las fórmulas (8.4.1) y (8.4.4) $2T_0$ y $2T_1$ deben ser por necesidad considerablemente menores que la longitud de realización T (cinco veces, por lo menos). Al determinar la esperanza matemática y la función correlativa de una función aleatoria estacionaria, como intervalo de mediación se toma prácticamente toda la longitud de realización. Por eso las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas de funciones aleatorias no estacionarias deben determinarse, como regla, por varias realizaciones.

Para determinar la esperanza matemática y la función correlativa de una función aleatoria no estacionaria por varias realizaciones de la misma, obtenidas experimentalmente, se recomienda emplear para cada realización el método de alisado expuesto anteriormente y tomar las medias aritméticas de los resultados referentes a distintas realizaciones.

Por el método de alisado de uno o varios pares de realizaciones de dos funciones aleatorias se determina de un modo semejante la función correlativa recíproca de las mismas.

Subrayemos una vez más que el método de alisado de una o varias realizaciones se puede utilizar para hallar las estimaciones de las esperanzas matemáticas y funciones correlativas de funciones aleatorias solamente en el caso en que los intervalos de correlación de todas las funciones aleatorias anotadas son pequeños en comparación con la longitud de cada realización obtenida. Sobre el cumplimiento de esta condición se puede juzgar por el carácter de las realizaciones obtenidas. Si todas las realizaciones anotadas de las funciones aleatorias son visiblemente oscilaciones caóticas, se puede considerar que el «carácter aleatorio» de las funciones «se ha manifestado bastante bien» y para hallar las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas recíprocas se puede emplear el método de alisado de las

realizaciones expuesto anteriormente. Con ello, cuanto más oscilaciones caóticas efectúen las funciones anotadas en el intervalo de anotación tanto menor número de realizaciones será necesario. Para las funciones aleatorias con esperanzas matemáticas y dispersiones lentamente variables, las cuales se pueden considerar próximas a las estacionarias (el caso de una no estacionaridad débil), se puede limitarse a una realización lo suficientemente larga.

Pero si la longitud de las realizaciones anotadas es comparable con el intervalo de correlación de la función aleatoria, por ejemplo, si todas las realizaciones anotadas representan curvas suaves, entonces es en principio imposible hallar las estimaciones convenientes de las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas y correlativas recíprocas sirviéndose del método de alisado de las realizaciones. En semejantes casos el único procedimiento posible de determinación de las estimaciones de las esperanzas matemáticas y de las funciones correlativas y correlativas recíprocas consiste en tomar un número suficientemente grande de realizaciones (del orden de 100) y, examinando los valores de las funciones aleatorias para diferentes valores del argumento como magnitudes aleatorias, emplear las fórmulas del § 8.2 para el cálculo de las estimaciones de sus esperanzas matemáticas, dispersiones y momentos de correlación. Este procedimiento es, desde luego, absolutamente general y puede ser utilizado en todos los casos. Sin embargo, siempre exige un gran número de realizaciones para obtener una precisión satisfactoria de las estimaciones de las esperanzas matemáticas y funciones correlativas. Además, si la longitud de las realizaciones anotadas es grande en comparación con el intervalo de correlación, este procedimiento no es racional puesto que no utiliza toda la información comprendida en los resultados de los experimentos. Por eso, si el intervalo de correlación de la función aleatoria es pequeño en comparación con la longitud de las realizaciones obtenidas como resultado de las pruebas, para la determinación de las esperanzas matemáticas y de las funciones correlativas se recomienda emplear el método expuesto más arriba de alisado de una o varias realizaciones.

Suplementos

1. Algunas integrales determinadas

Al deducir ciertas fórmulas de la Teoría de las Probabilidades hay que aplicar la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\, e^{\frac{\eta^2}{4h^2}}, \tag{1}$$

válida para cualquier valor real de $h > 0$ y para cualquier η complejo. En particular, cuando $\eta = 0$, la fórmula (1) toma la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h}. \tag{2}$$

Para deducir la fórmula (1), pongamos

$$I(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2}\, dt. \tag{3}$$

Derivando esta fórmula con respecto al parámetro η e integrando por partes, obtendremos

$$I'(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} t e^{\eta t - h^2 t^2}\, dt = -\frac{1}{2h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t}\, de^{-h^2 t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2h^2}\, e^{\eta t} e^{-h^2 t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\eta}{2h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t} e^{-h^2 t^2}\, dt = \frac{\eta}{2h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2}\, dt$$

o bien

$$I'(\eta) = \frac{\eta}{2h^2}\, I(\eta). \tag{4}$$

Esta fórmula puede ser considerada como la ecuación diferencial que determina la integral $I(\eta)$. Para determinar por completo la integral $I(\eta)$, ahora es suficiente hallar su valor para un valor cualquiera de η. Lo más sencillo es calcular el valor de esta integral para $\eta = 0$, es decir, la integral (2):

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 t^2} dt \tag{5}$$

Puesto que esta integral no depende de cómo está designada la variable de integración, se puede escribir también

$$I(0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2s^2}\,ds. \tag{6}$$

Multiplicando miembro a miembro las fórmulas (5) y (6), obtendremos

$$I^2(0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2t^2}\,dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2s^2}\,ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2s^2}\,ds\right\} e^{-h^2t^2}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+s^2)h^2}\,dt\,ds.$$

De este modo, hemos reducido el problema al cálculo de la integral doble. Esta integral se calcula fácilmente en las coordenadas polares. Poniendo

$$ht=r\cos\varphi, \qquad hs=r\operatorname{sen}\varphi$$

y tomando en consideración que el jacobiano de esta transformación es igual a r/h^2:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial t}{\partial r} & \dfrac{\partial s}{\partial r}\\[2mm] \dfrac{\partial t}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial s}{d\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{h}\cos\varphi & \dfrac{1}{h}\operatorname{sen}\varphi\\[2mm] -\dfrac{r}{h}\operatorname{sen}\varphi & \dfrac{r}{h}\cos\varphi\end{vmatrix}=\frac{r}{h^2},$$

obtendremos

$$I^2(0)=\frac{1}{h^2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr=-\frac{\pi}{h^2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{h^2},$$

de donde se deduce precisamente la fórmula (2).

La integral de la ecuación (4), igual a $\dfrac{\sqrt{\pi}}{h}$ para $\eta=0$, se expresa por la fórmula

$$I(\eta)=\frac{\sqrt{\pi}}{h}\,e^{\frac{\eta^2}{4h^2}}.$$

Esto es fácil comprobar por la sustitución directa. Así, pues, la fórmula (1) queda demostrada.

De (1) se deducen fácilmente las fórmulas

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k-1}e^{-h^2t^2}\,dt=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}e^{-h^2t^2}\,dt=\frac{(2k-1)!!}{2^kh^{2k+1}}\sqrt{\pi} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{8}$$

Para deducir estas fórmulas, derivemos la fórmula (8) con respecto al parámetro η. Como resultado obtendremos

$$I^{(r)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r e^{\eta t - h^2 t^2} dt \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

Poniendo aquí $\eta = 0$, tendremos

$$I^{(r)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r e^{-h^2 t^2} dt \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Así pues, todas las integrales que nos interesan son los valores de derivadas de la integral $I(\eta)$ para $\eta = 0$. La primera derivada de la integral $I(\eta)$ se determina por la fórmula (4). Para determinar las derivadas de órdenes superiores de la integral $I(\eta)$, derivamos la fórmula (4). Entonces obtendremos

$$I''(\eta) = \frac{1}{2h^2} I(\eta) + \frac{\eta}{2h^2} I'(\eta) \tag{10}$$

y en general

$$I^{(r)}(\eta) = \frac{r-1}{2h^2} I^{(r-2)}(\eta) + \frac{\eta}{2h^2} I^{(r-1)}(\eta). \tag{11}$$

Para demostrar esta fórmula, es suficiente utilizar el método de inducción matemática. Suponiendo que esta fórmula es válida para cierto valor de r, demostremos que es válida también para $r + 1$. Derivando la fórmula (11), obtenemos

$$I^{(r+1)}(\eta) = \frac{r-1}{2h^2} I^{(r-1)}(\eta) + \frac{1}{2h^2} I^{(r-1)}(\eta) + \frac{\eta}{2h^2} I^{(r)}(\eta) = \frac{r}{2h^2} I^{(r-1)}(\eta) + \frac{\eta}{2h^2} I^{(r)}(\eta)$$

lo que era necesario demostrar. Así pues, puesto que la fórmula (11) es válida para $r = 2$ [la fórmula (10)], ésta es válida para cualquier r.

Suponiendo en (11) que $\eta = 0$, obtendremos

$$I^{(r)}(0) = \frac{r-1}{2h^2} I^{(r-2)}(0). \tag{12}$$

Pero de (4) se deriva que $I'(0) = 0$. Por consiguiente, los valores de todas las derivadas de órdenes impares de la integral $I(\eta)$ para $\eta = 0$ son iguales a cero, lo que demuestra la fórmula (7). Además, esta fórmula está clara sin demostración, puesto que la integral de una función impar en límites simétricos siempre es igual a cero.

Poniendo en (12) sucesivamente $r = 2, 4, 6, \ldots, 2k$, obtendremos

$$I''(0) = \frac{1}{2h^2} I(0), \quad I^{IV}(0) = \frac{3}{2h^2} I''(0),$$

. . . . . .

$$I^{(2k-2)}(0) = \frac{2k-3}{2h^2} I^{(2k-4)}(0),$$

$$I^{(2k)}(0) = \frac{2k-1}{2h^2} I^{(2k-2)}(0).$$

Multiplicando todas estas igualdades entre sí y efectuando las simplificaciones correspondientes, obtendremos

$$I^{(2k)}(0) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2^k h^{2k}} I(0).$$

Sustituyendo aquí la expresión (2) de la magnitud $I(0)$, obtendremos precisamente la fórmula (8).

Dado que la función subintegral en (8) es par, de (8) se deduce una fórmula más:

$$\int_0^\infty t^{2k} e^{-h^2t^2}\,dt = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}h^{2k+1}}\sqrt{\pi} \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Para la integral análoga con potencias impares tiene lugar la fórmula

$$\int_0^\infty t^{2k-1} e^{-h^2t^2}\,dt = \frac{(k-1)!}{2h^{2k}} \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Para deducir esta fórmula, observemos que para cualquier $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty te^{-\alpha t^2}\,dt = \frac{1}{2\alpha} \qquad (\alpha > 0). \tag{15}$$

En efecto,

$$\int_0^\infty te^{-\alpha t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha u}\,du = \frac{1}{2}\frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2\alpha}.$$

Derivando la fórmula (15) con respecto al parámetro, obtendremos

$$-\int_0^\infty t^3 e^{-\alpha t^2}\,dt = -\frac{1}{2\alpha^2}, \qquad \int_0^\infty t^5 e^{-\alpha t^2}\,dt = \frac{1\cdot 2}{2\alpha^3}$$

. . . . . .

$$\int_0^\infty t^{2k-1} e^{-\alpha t^2}\,dt = \frac{(k-1)!}{2\alpha^k}.$$

Poniendo aquí $\alpha = h^2$, obtendremos precisamente la fórmula (14).

Con ayuda de las fórmulas (1) y (2) se puede calcular algunas otras integrales determinadas que tenemos que aplicar en este libro.

Demostremos que para cualquier valor real de τ y para cualquier α positivo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \frac{\pi}{\alpha}\,e^{-\alpha|\tau|}. \tag{16}$$

Para deducir esta fórmula, observemos que para cualesquiera μ y α reales

$$\frac{1}{\alpha^2+\mu^2} = \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\mu^2)z}\,dz. \tag{17}$$

En virtud de esta fórmula la integral en (16) puede ser sustituida por la integral doble:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \int_{-\infty}^\infty e^{i\mu\tau}\,d\mu \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\mu^2)z}\,dz.$$

Cambiando el orden de integración, obtendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 z}\,dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\mu - z\mu^2}\,d\mu. \tag{18}$$

Pero conforme a la fórmula (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\mu - z\mu^2}\,d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{-\frac{\tau^2}{4z}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (18), tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 z - \frac{\tau^2}{4z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Aumentando el exponente hasta que se obtenga el cuadrado completo, obtendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \sqrt{\pi}\, e^{-\alpha|\tau|} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\alpha^2 z + 2\alpha\sqrt{z}\,\frac{|\tau|}{2\sqrt{z}} - \frac{\tau^2}{4z}\right\} \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{-\alpha|\tau|} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left(\alpha\sqrt{z} - \frac{|\tau|}{2\sqrt{z}}\right)^2\right\} \frac{dz}{\sqrt{z}}. \tag{19}$$

Hagamos ahora la sustitución de las variables

$$t = \alpha\sqrt{z} - \frac{|\tau|}{2z}. \tag{20}$$

Al variar $\sqrt{z}$ desde 0 hasta ∞, la variable t cambia monótonamente desde $-\infty$ hasta ∞. Por lo tanto, la ecuación (20) tiene una sola solución positiva con respecto a $\sqrt{z}$ (en la figura dada se muestra t en función de $\sqrt{z}$). Esta solución se determina por la fórmula

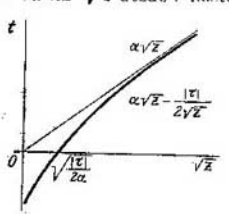


Fig. S.1.

$$\sqrt{z} = \frac{1}{2\alpha}\left(t + \sqrt{t^2 + 2\alpha|\tau|}\right).$$

De aquí hallamos

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{dt}{2\alpha}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+2\alpha|\tau|}}\right). \tag{21}$$

Sustituyendo las expresiones (20) y (21) en (19) y teniendo en cuenta que $t = -\infty$ para $z = 0$ y $t = \infty$ para $z = \infty$, tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau\mu}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{-\alpha|\tau|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+2\alpha|\tau|}}\right) dt.$$

De aquí, tomando en consideración que la integral de una función impar en límites simétricos es igual a cero y aplicando la fórmula (2) para $h = 1$, ob-

tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{-\alpha|\tau|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\pi}{\alpha}\, e^{-\alpha|\tau|}$$

que es lo que demuestra a la fórmula (16).

De la fórmula (16), derivando con respecto al parámetro τ, se obtiene la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \begin{cases} i\pi e^{-\alpha|\tau|} \text{ para } \tau > 0. \\ -i\pi e^{-\alpha|\tau|} \text{ para } \tau < 0. \end{cases} \tag{22}$$

En virtud de la fórmula conocida de Euler, la fórmula (16) puede ser escrita en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\mu\tau + i\,\operatorname{sen}\mu\tau}{\alpha^2+\mu^2}\,d\mu = \frac{\pi}{\alpha}\, e^{-\alpha|\tau|}.$$

De aquí, teniendo en cuenta que en límites simétricos la integral de una función impar es igual a cero y la integral de una función par es igual a la integral duplicada de 0 a ∞, obtendremos

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\mu\tau\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2} = \frac{\pi}{2\alpha}\, e^{-\alpha|\tau|}. \tag{23}$$

2. Tabla de los valores de la función de Laplace

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,0000	0,36	0,1406	0,72	0,2642	1,08	0,3599
0,01	0,0040	0,37	0,1443	0,73	0,2673	1,09	0,3621
0,02	0,0080	0,38	0,1480	0,74	0,2703	1,10	0,3643
0,03	0,0120	0,39	0,1517	0,75	0,2734	1,11	0,3665
0,04	0,0160	0,40	0,1554	0,76	0,2764	1,12	0,3686
0,05	0,0199	0,41	0,1591	0,77	0,2794	1,13	0,3708
0,06	0,0239	0,42	0,1628	0,78	0,2823	1,14	0,3729
0,07	0,0279	0,43	0,1664	0,79	0,2852	1,15	0,3749
0,08	0,0319	0,44	0,1700	0,80	0,2881	1,16	0,3770
0,09	0,0359	0,45	0,1736	0,81	0,2910	1,17	0,3790
0,10	0,0398	0,46	0,1772	0,82	0,2939	1,18	0,3810
0,11	0,0438	0,47	0,1808	0,83	0,2967	1,19	0,3830
0,12	0,0478	0,48	0,1844	0,84	0,2995	1,20	0,3849
0,13	0,0517	0,49	0,1879	0,85	0,3023	1,21	0,3869
0,14	0,0557	0,50	0,1915	0,86	0,3051	1,22	0,3888
0,15	0,0596	0,51	0,1950	0,87	0,3078	1,23	0,3907
0,16	0,0636	0,52	0,1985	0,88	0,3106	1,24	0,3925
0,17	0,0675	0,53	0,2019	0,89	0,3133	1,25	0,3944
0,18	0,0714	0,54	0,2054	0,90	0,3159	1,26	0,3962
0,19	0,0753	0,55	0,2088	0,91	0,3186	1,27	0,3980
0,20	0,0793	0,56	0,2123	0,92	0,3212	1,28	0,3997
0,21	0,0832	0,57	0,2157	0,93	0,3238	1,29	0,4015
0,22	0,0871	0,58	0,2190	0,94	0,3264	1,30	0,4032
0,23	0,0910	0,59	0,2224	0,95	0,3289	1,31	0,4049
0,24	0,0948	0,60	0,2257	0,96	0,3315	1,32	0,4066
0,25	0,0987	0,61	0,2291	0,97	0,3340	1,33	0,4082
0,26	0,1026	0,62	0,2324	0,98	0,3365	1,34	0,4099
0,27	0,1064	0,63	0,2357	0,99	0,3389	1,35	0,4115
0,28	0,1103	0,64	0,2389	1,00	0,3413	1,36	0,4131
0,29	0,1141	0,65	0,2422	1,01	0,3437	1,37	0,4147
0,30	0,1179	0,66	0,2454	1,02	0,3461	1,38	0,4162
0,31	0,1217	0,67	0,2486	1,03	0,3485	1,39	0,4177
0,32	0,1255	0,68	0,2517	1,04	0,3508	1,40	0,4192
0,33	0,1293	0,69	0,2549	1,05	0,3531	1,41	0,4207
0,34	0,1331	0,70	0,2580	1,06	0,3554	1,42	0,4222
0,35	0,1368	0,71	0,2611	1,07	0,3577	1,43	0,4236

Continuación

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
1,44	0,4251	1,73	0,4582	2,04	0,4793	2,60	0,4953
1,45	0,4265	1,74	0,4591	2,06	0,4803	2,62	0,4956
1,46	0,4279	1,75	0,4599	2,08	0,4812	2,64	0,4959
1,47	0,4292	1,76	0,4608	2,10	0,4821	2,66	0,4961
1,48	0,4306	1,77	0,4616	2,12	0,4830	2,68	0,4963
1,49	0,4319	1,78	0,4625	2,14	0,4838	2,70	0,4965
1,50	0,4332	1,79	0,4633	2,16	0,4846	2,72	0,4967
1,51	0,4345	1,80	0,4641	2,18	0,4854	2,74	0,4969
1,52	0,4357	1,81	0,4649	2,20	0,4861	2,76	0,4971
1,53	0,4370	1,82	0,4656	2,22	0,4868	2,78	0,4973
1,54	0,4382	1,83	0,4664	2,24	0,4875	2,80	0,4974
1,55	0,4394	1,84	0,4671	2,26	0,4881	2,82	0,4976
1,56	0,4406	1,85	0,4678	2,28	0,4887	2,84	0,4977
1,57	0,4418	1,86	0,4686	2,30	0,4893	2,86	0,4979
1,58	0,4429	1,87	0,4693	2,32	0,4898	2,88	0,4980
1,59	0,4441	1,88	0,4699	2,34	0,4904	2,90	0,4981
1,60	0,4452	1,89	0,4706	2,36	0,4909	2,92	0,4982
1,61	0,4463	1,90	0,4713	2,38	0,4913	2,94	0,4984
1,62	0,4474	1,91	0,4719	2,40	0,4918	2,96	0,4985
1,63	0,4484	1,92	0,4726	2,42	0,4922	2,98	0,4986
1,64	0,4495	1,93	0,4732	2,44	0,4927	3,00	0,49865
1,65	0,4505	1,94	0,4738	2,46	0,4931	3,20	0,49931
1,66	0,4515	1,95	0,4744	2,48	0,4934	3,40	0,49966
1,67	0,4525	1,96	0,4750	2,50	0,4938	3,60	0,499841
1,68	0,4535	1,97	0,4756	2,52	0,4941	3,80	0,499928
1,69	0,4545	1,98	0,4761	2,54	0,4945	4,00	0,499968
1,70	0,4554	1,99	0,4767	2,56	0,4948	4,50	0,499997
1,71	0,4564	2,00	0,4772	2,58	0,4951	5,00	0,49999997
1,72	0,4573	2,02	0,4783				

A nuestros lectores:

«MIR» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial «MIR», I Rizhski per. 2, Moscú GSP I-110 129820, URSS.

Libros que serán publicados por la Editorial «Mir» en 1973

GUELFAND I., GLAGOLEVA E., KIRILOV A

MÉTODO DE COORDENADAS

Es un libro de Israil Guelfand, doctor en ciencias físico-matemáticas y profesor de la Universidad de Moscú, de Alejandro Kirílov, candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas y de Elena Glagóleva, colaboradora científica. Es el primero de la serie de matemáticas: «Biblioteca de la escuela físico-matemática».

En esta obra se describe el método de las coordenadas, es decir, el procedimiento para determinar la posición de un punto o cuerpo con ayuda de cifras o de otros símbolos.

De un modo ingenioso y comprensible, a la vez que rigurosamente científico, se trata de las coordenadas de un punto sobre una recta, sobre un plano, en el espacio; del espacio cuadridimensional, del cubo cuadridimensional y de otras cuestiones de interés relacionadas con la matemática moderna.

En cada una de las partes del libro se dan tareas y preguntas a resolver por el lector. Es un libro de matemáticas para los escolares del tercer año de las escuelas especiales de matemáticas y no exige conocimientos especiales que no estén incluidos en el programa escolar.

Todo el que se interese en las matemáticas, leerá este libro con satisfacción.

ROZANOV YU.

PROCESOS ALEATORIOS

En el libro de Yu. Rózanov, doctor en ciencias fisicomatemáticas, se estudian la teoría de las probabilidades y los procesos aleatorios. En el mismo se exponen las nociones fundamentales y los métodos de la teoría de las probabilidades moderna, en modelos sencillos se analizan las propiedades más características de los procesos aleatorios de distintos tipos, se examinan los problemas teóricos de las probabilidades que son motivo de cierto interés para diferentes fines.

Durante la exposición del material se emplean, generalmente, «métodos directos de las probabilidades», lo cual contribuye al desarrollo de la intuición sobre este particular, de mucha importancia en la resolución de los problemas teóricos de este tipo. Gracias a ésto, el libro de Yu. Rózanov se destaca entre otros manuales por la teoría de los procesos aleatorios. Además, los primeros capítulos del libro contienen las nociones indispensables de la teoría de las probabilidades, por eso no se exige de los lectores un conocimiento previo de otros manuales ni una preparación matemática general.

Es indudable que este libro está destinado a aquellos que por vez primera estudian la teoría de las probabilidades y los procesos aleatorios. Sin lugar a dudas, será acogido con gran interés por los especialistas, sobre todo, por los profesores de estas disciplinas en los centros de enseñanza técnica superior.

Ante todo, este libro se recomienda a los estudiantes de las especialidades fisicomatemáticas y técnicas de los centros de enseñanza superior, así como a los especialistas que se interesan por la aplicación de la teoría de los procesos aleatorios.

I. SUVOROV

MATEMATICAS SUPERIORES

Este libro se debe al doctor en ciencias fisicomatemáticas IOROFEI SUVOROV. Esta obra comprende el estudio de las siguientes partes de las matemáticas superiores: geometría analítica, en el plano y en el espacio, cálculo diferencial e integral, conceptos fundamentales del análisis matemático, series, conceptos sobre líneas planas y alabeadas, diferenciación e integración de funciones de varios argumentos y ecuaciones diferenciales. Aquí también se incluyen problemas y ejemplos con sus resoluciones y algunas indicaciones de tipo metódico. El libro está ilustrado con esquemas geométricos que facilitan la comprensión del material y aclaran los métodos para la solución de los problemas. Es libro de texto para los centros de enseñanza técnica superior y media. Su principal mérito es la forma clara y concisa en que se expone el material. En ruso se han publicado cinco ediciones de este libro.

En 1974 La Editorial «Mir» Publicara:

GMURMAN V.

LA TEORIA DE LAS PROBABILIDADES Y LA ESTADISTICA MATEMATICA

Este tratado ha sido escrito de conformidad con el nuevo curso de la teoría de las probabilidades y de la estadística matemática. El material de esta obra se presenta en tres partes fundamentales: las dos primeras se dedican a la teoría de las probabilidades y la última, a la estadística matemática. En este manual se estudian los temas siguientes: probabilidad de las hipótesis; fórmulas de Bayes; distribución de Poisson; nociones de estadística matemática y noción de correlación.

La cuarta edición de este libro contiene algunos capítulos nuevos: distribución exponencial, verificación de las hipótesis estadísticas y análisis dispersional uniforme.

En el libro se presta gran atención a los métodos estadísticos de elaboración de los datos experimentales, las tablas que se exponen para los cálculos son muy cómodas. Cada capítulo contiene problemas y sus respuestas que han sido elegidos adecuadamente. Además, todo capítulo va acompañado de análisis de las soluciones de los problemas del material correspondiente.

Esta obra contiene 17 capítulos, varias tablas de números, 22 figuras y un gran número de ejemplos teóricos y técnicos. se recomienda para los estudiantes de las facultades ingeniero-técnicas y económicas.